第7回

- 多項式、有理多項式、方程式の根
- フィードバック制御系の内部安定性
- 外乱に対する定常偏差

多項式と方程式の根

コンソール　問題

```
>s = polynomial("s");
>p1 = s + 1
s + 1
>p2 = s + 2
s + 2
>p3 = p1*p2
s^2 + 3*s + 2
>roots(p3)
 ===     (    2   x    1)  CoMatrix  ===
          [ (   1)-Real      (   1)-Imag ]
  (   1)                  -1             0
  (   2)                  -2             0
```

多項式変数の定義

多項式の乗算

方程式「p3=0」の根

有理多項式と極･零点

有理多項式

```
>s = polynomial("s");
>g = (s - 1)/(s^2 + 3*s + 2)
      s - 1
 ---------------
  s^2 + 3 s + 2
```

分子

```
>Nu(g)
s - 1
```

分母

```
>De(g)
s^2 + 3*s + 2
```

極

```
>poles(g)
 ===     (    2   x    1)   CoMatrix   ===
         [  (    1)-Real      (    1)-Imag  ]
 (    1)                -1                 0
 (    2)                -2                 0
```

零点

```
>zeros(g)
 ===     (    1   x    1)   CoMatrix   ===
         [  (    1)-Real      (    1)-Imag  ]
 (    1)                 1                 0
```

有理多項式行列

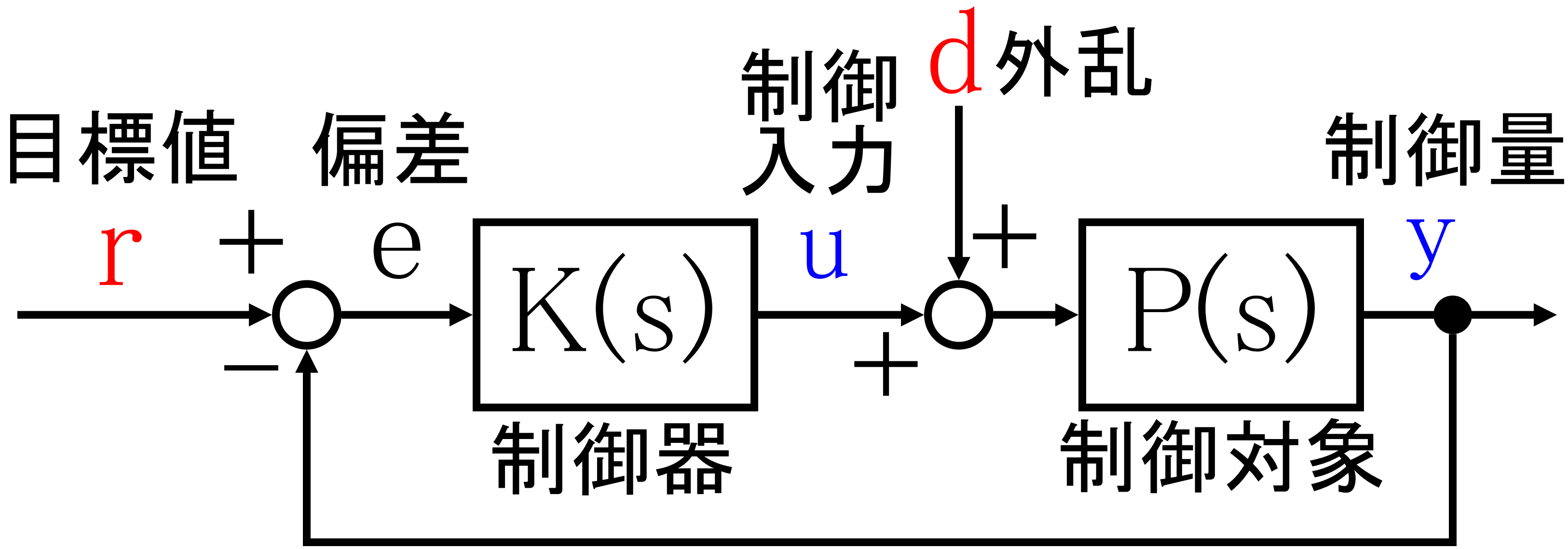
コンソール　問題

```
>g11 = 1/(s+1);
>g12 = 1/(s+2);
>g21 = 1/(s+3);
>g22 = 1/(s+4);
>G = [[g11 g12][g21 g22]]
 ===     (    2   x    2)   RaMatrix   ===
          [(   1)]       [(   2)]
              1              1
 (   1)  -------        -------
          s + 1          s + 2


              1              1
 (   2)  -------        -------
          s + 3          s + 4

>G(1,1)
    1
-------
 s + 1
```

有理多項式行列

行列の(1,1)成分

フィードバック制御系の内部安定性



外乱：制御対象に影響を及ぼすが、
操作できない外部信号

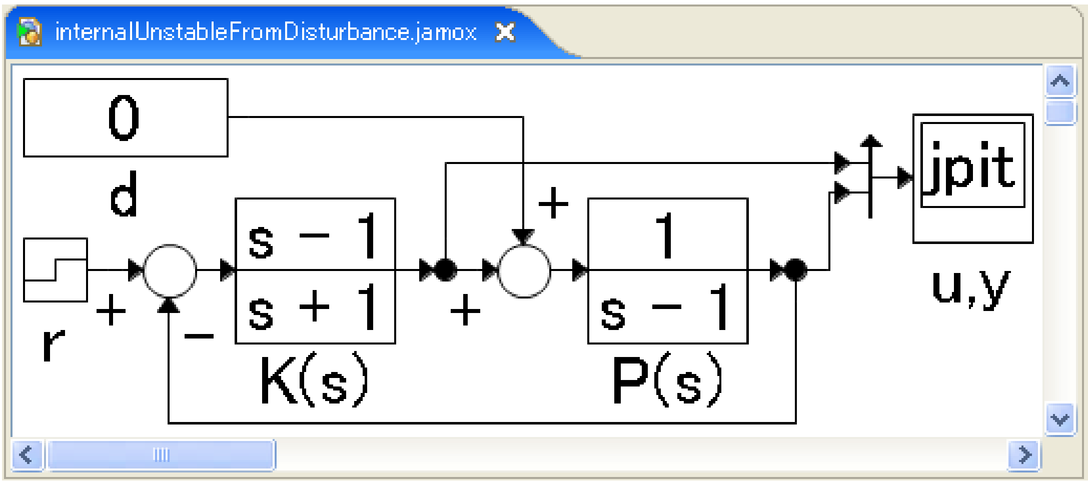
$$P(s) \triangleq \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$$

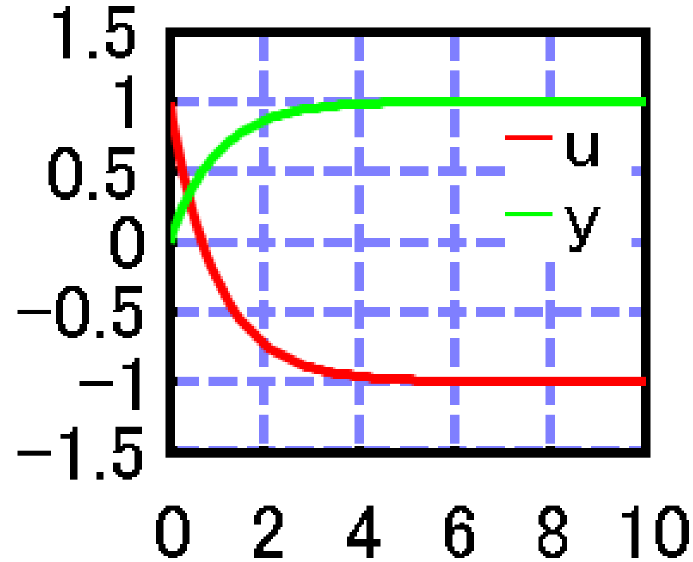
$$K(s) \triangleq \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

内部安定：各要素の出力が有界

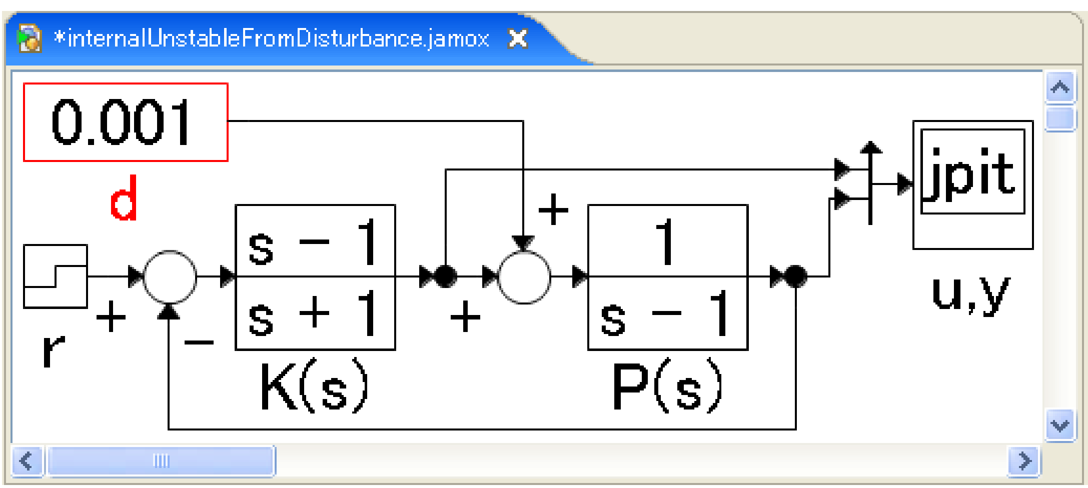
$(u < \infty)$ $(y < \infty)$

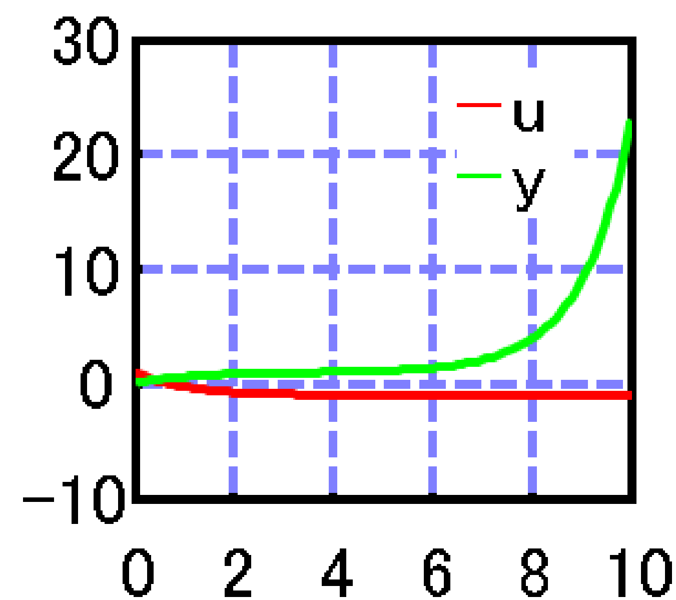
外乱により制御量が発散する制御系





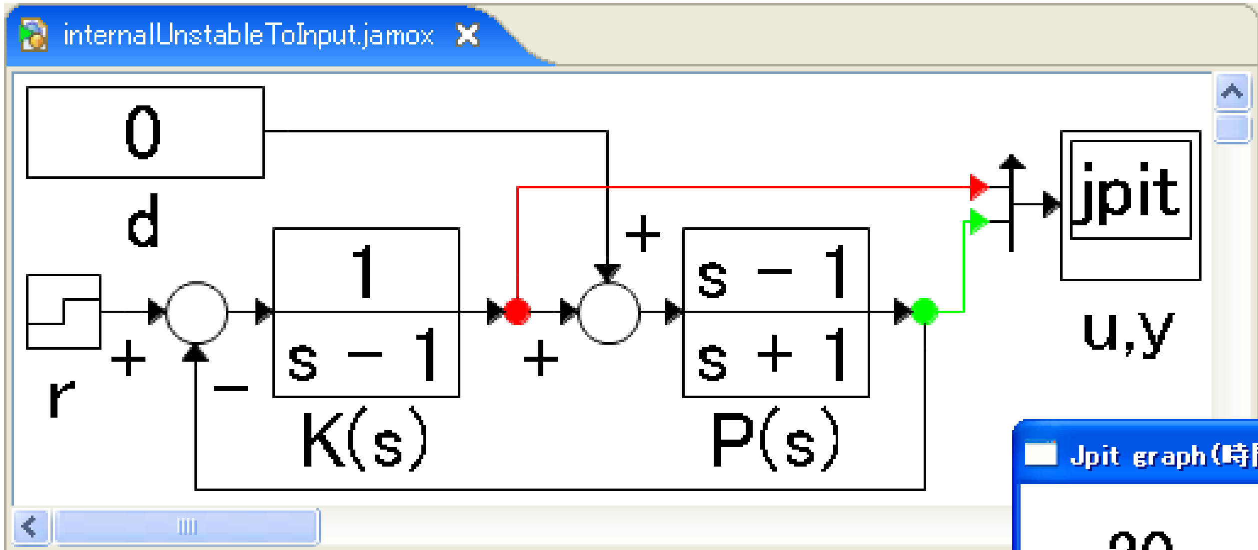
外乱無し

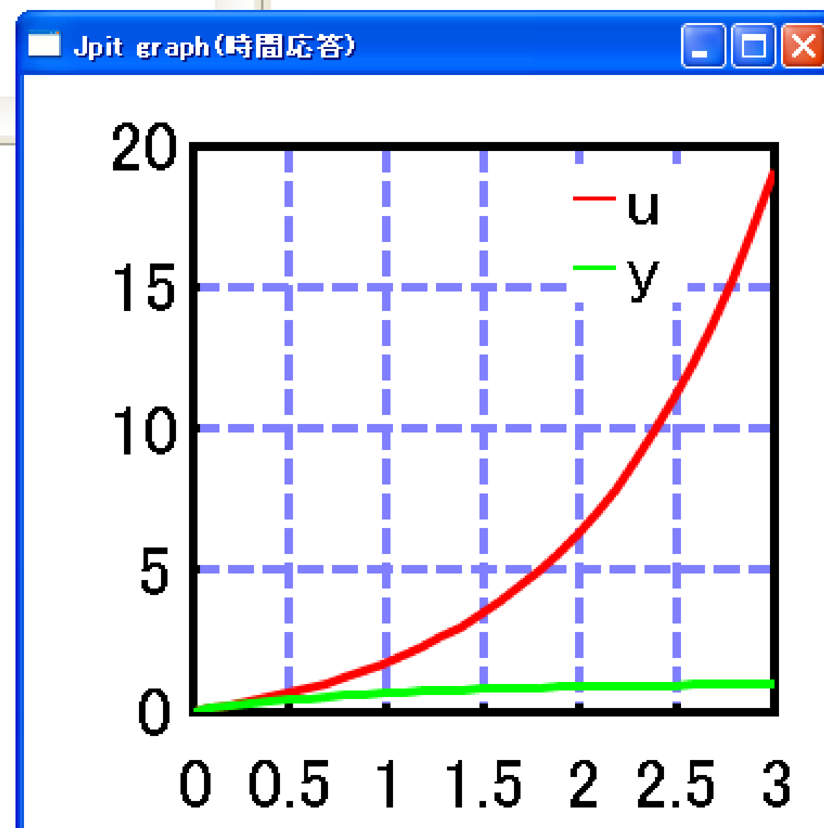




外乱有り

制御量が有界でも入力が発散する制御系





$$
\begin{aligned}
s^2 + s - 2 \\
&= (s+2)(s-1)
\end{aligned}
$$

内部安定条件

外部信号(r,d)から要素出力(u,y)への伝達関数

$$G_{ur}(s) = \frac{D_P(s)N_K(s)}{\phi(s)} \qquad G_{ud}(s) = \frac{-N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)}$$

$$G_{yr}(s) = \frac{N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)} \qquad G_{yd}(s) = \frac{N_P(s)D_K(s)}{\phi(s)}$$

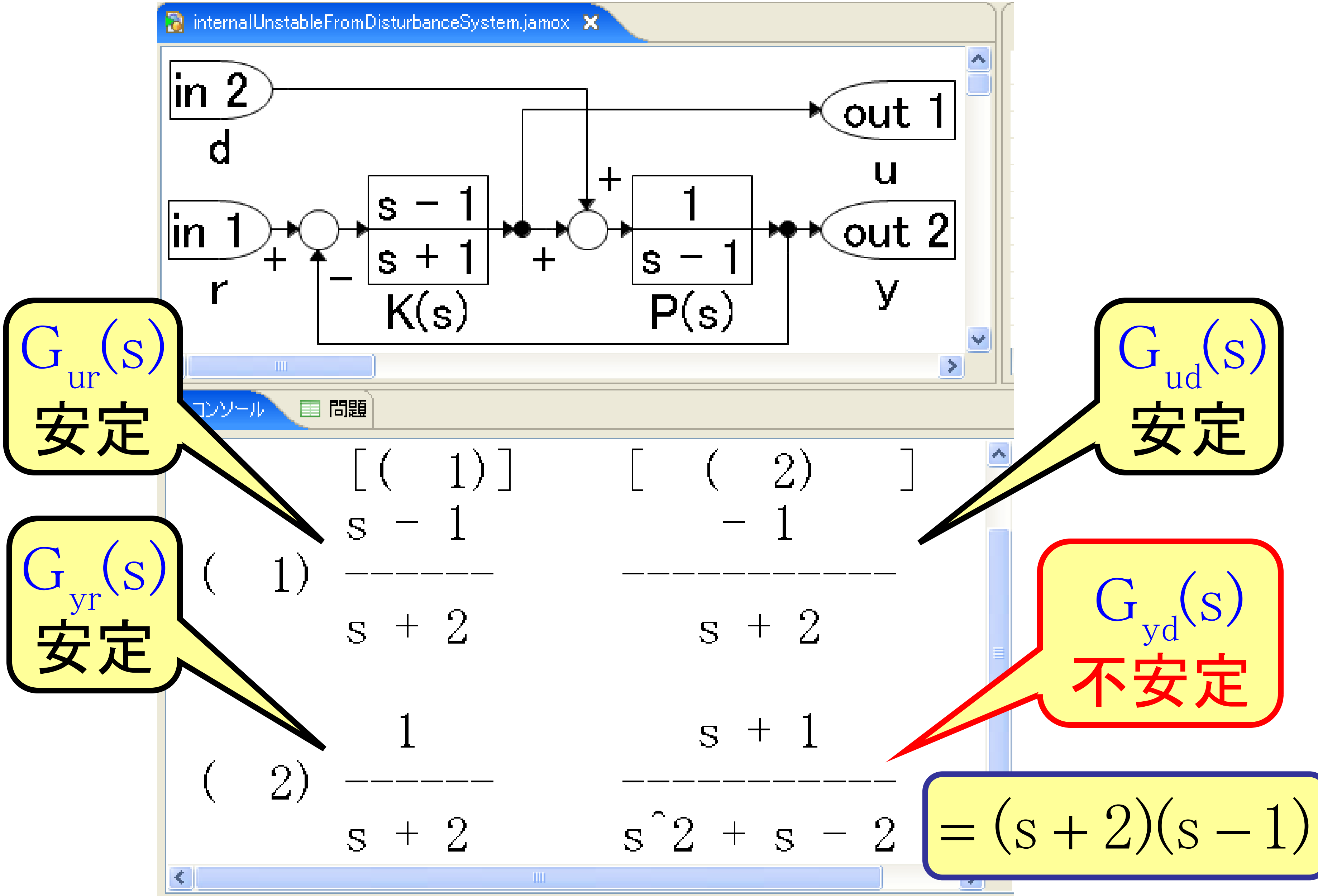
特性多項式: $\phi(s) \triangleq D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$

内部安定 $\Longleftrightarrow$ 4つの伝達関数が安定

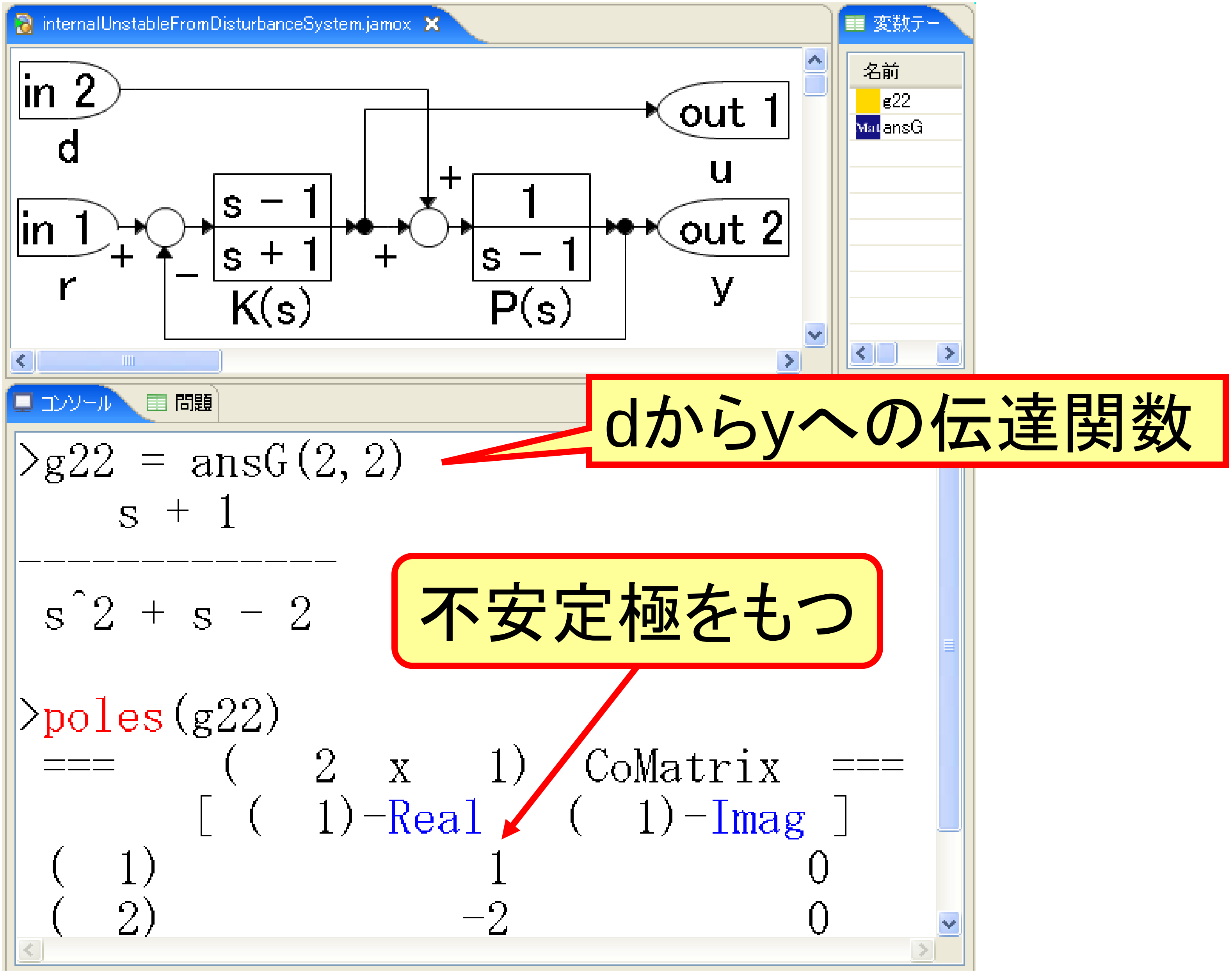
$\Updownarrow$

$\phi(s)$の全ての根の実部が負

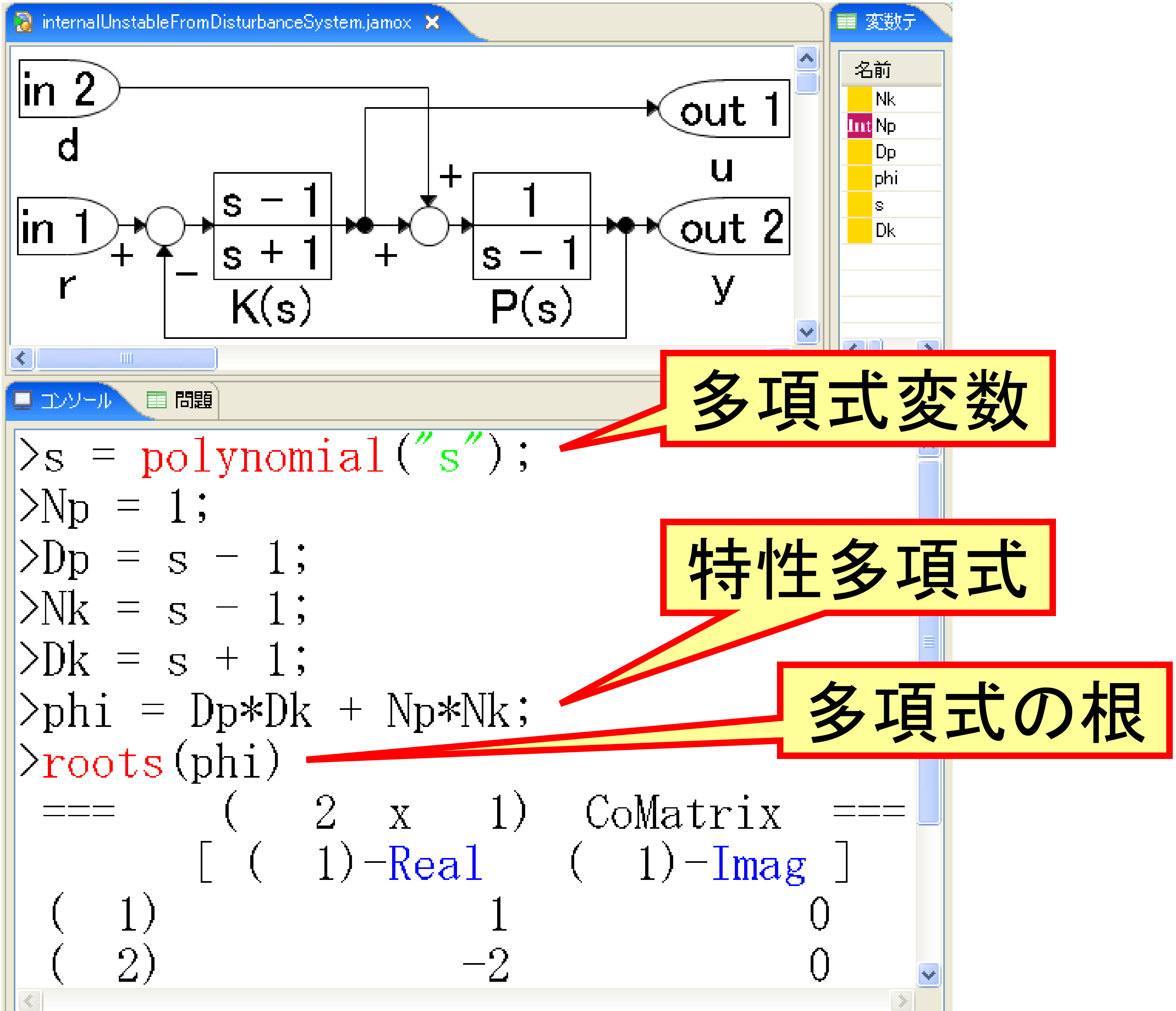
外乱により制御量が発散する制御系



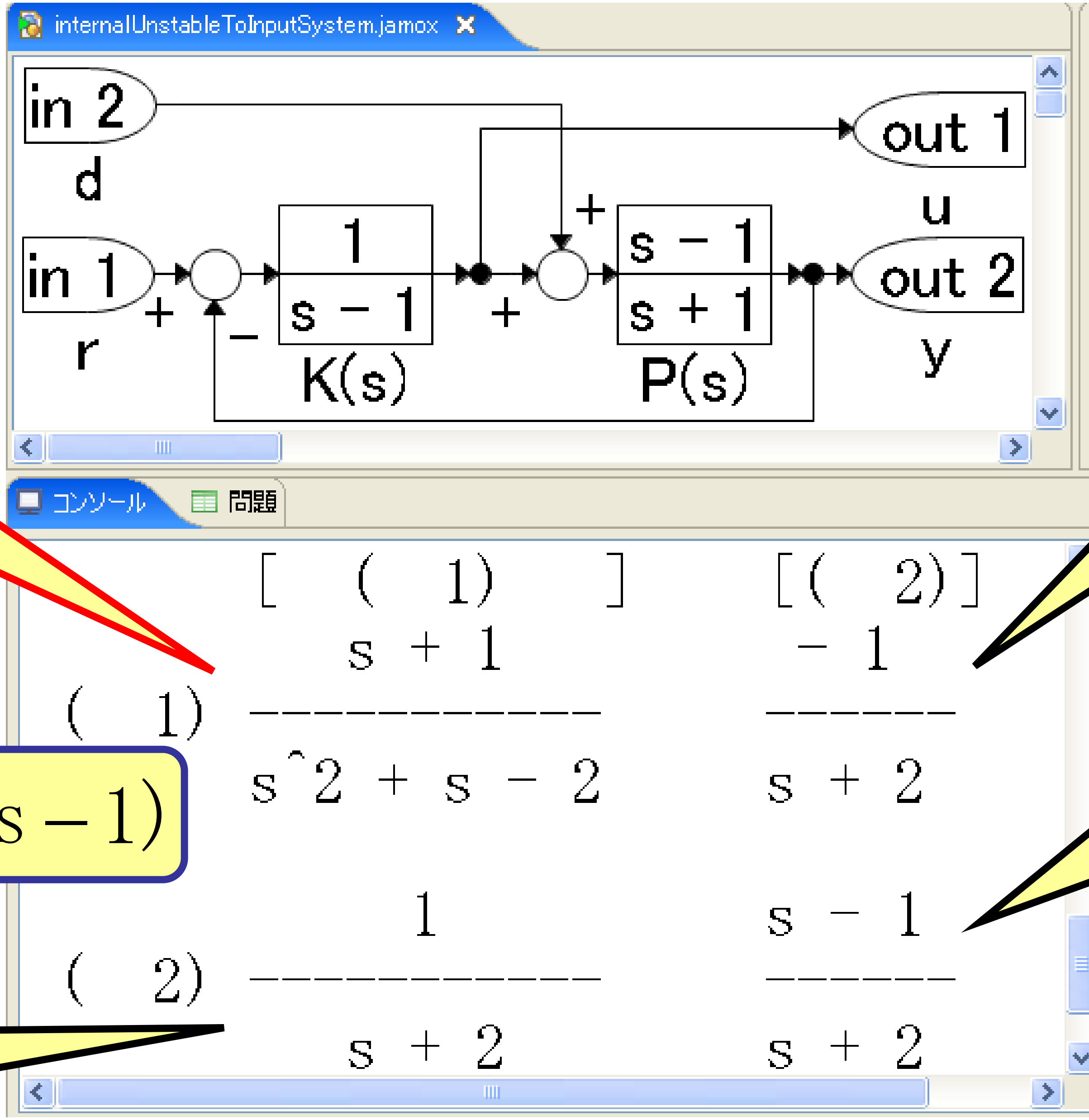
外乱により制御量が発散する制御系



外乱により制御量が発散する制御系



制御量が有界でも入力が発散する制御系



$G_{ur}(s)$ 不安定

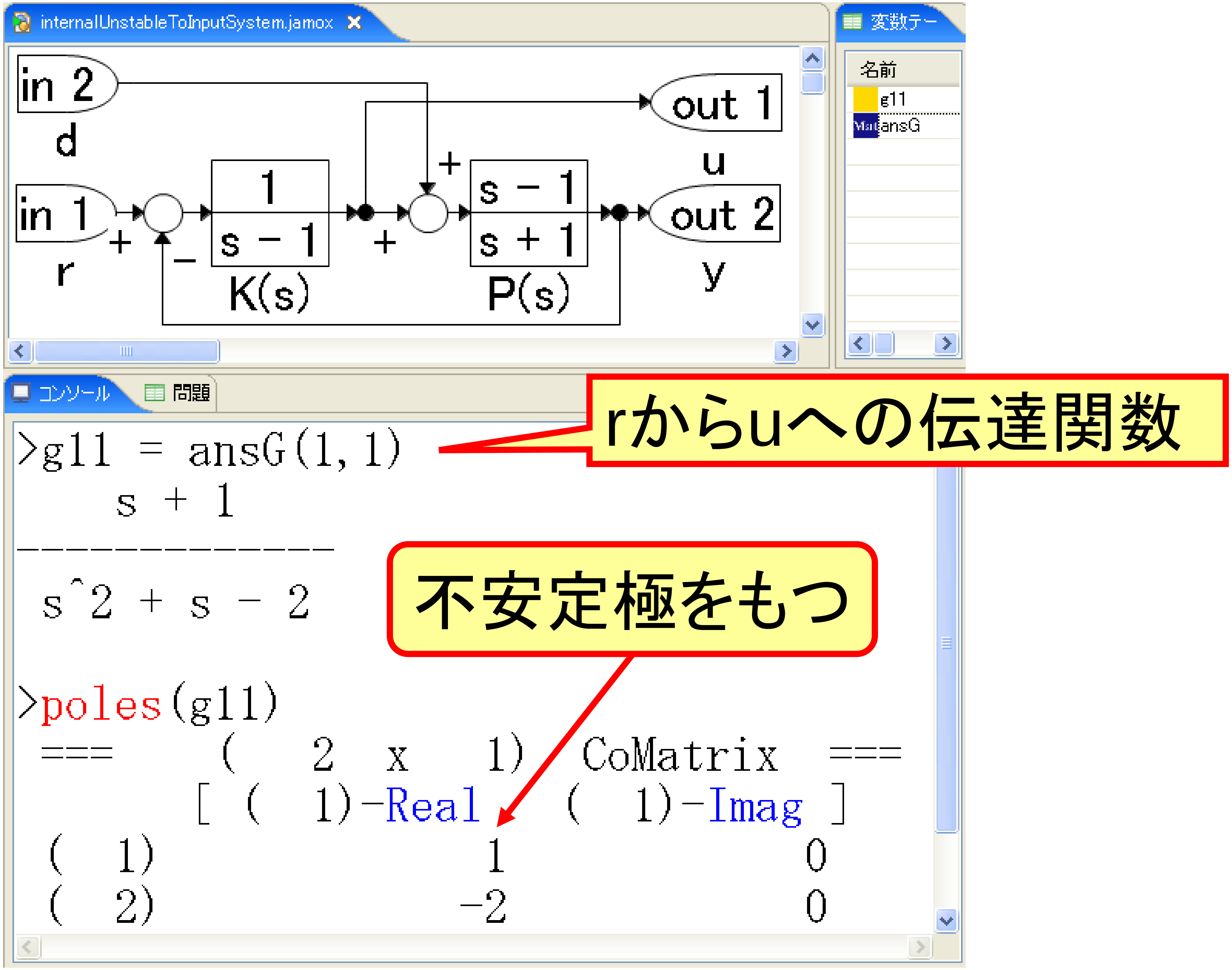
$= (s+2)(s-1)$

$G_{yr}(s)$ 安定

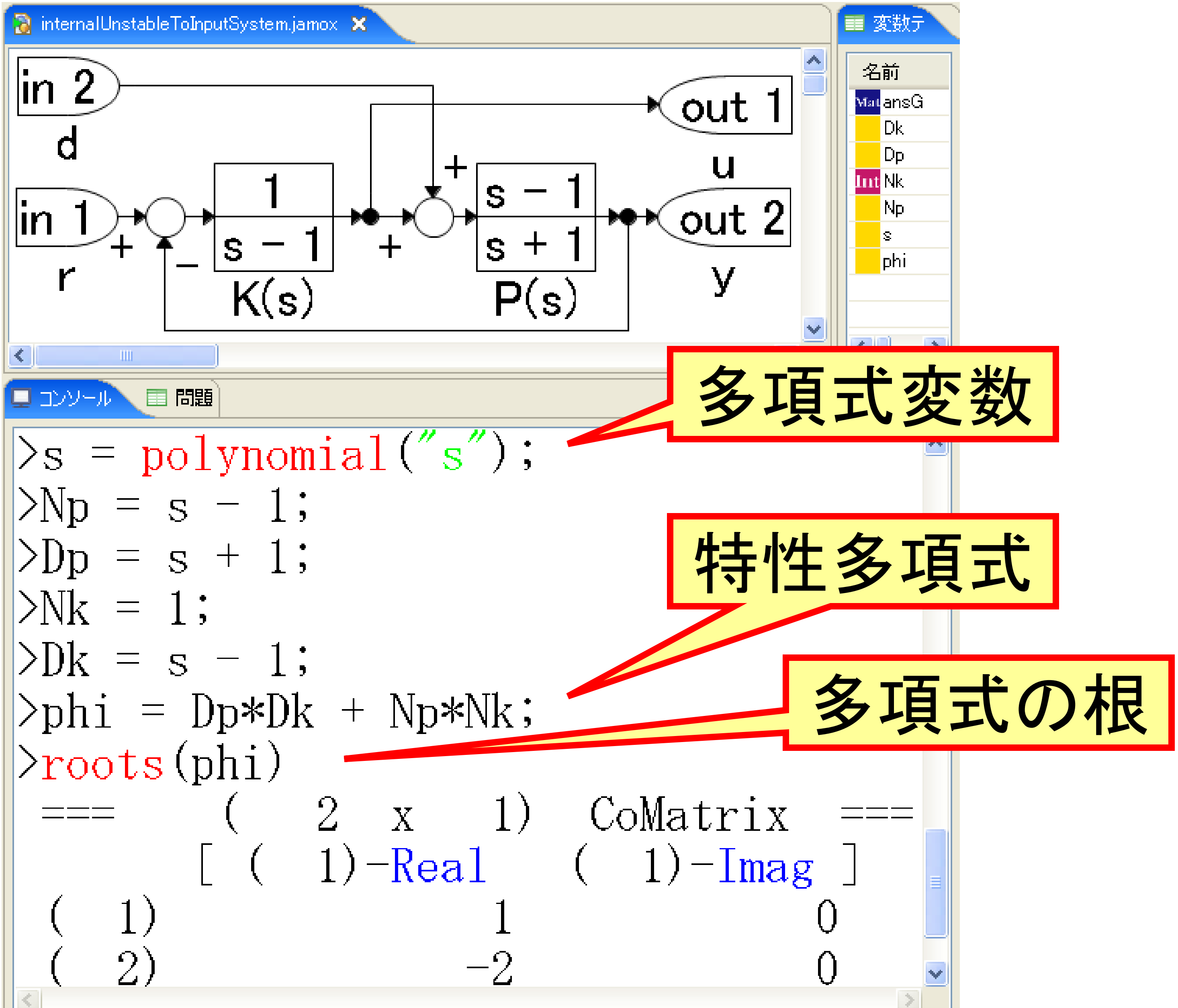
$G_{ud}(s)$ 安定

$G_{yd}(s)$ 安定

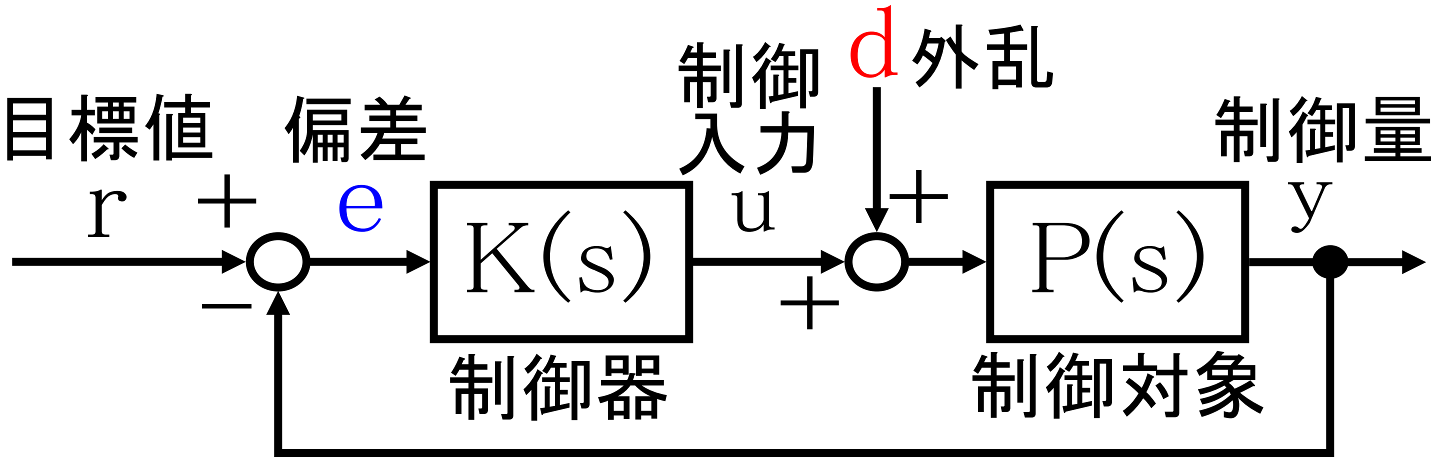
制御量が有界でも入力が発散する制御系



制御量が有界でも入力が発散する制御系



外乱に対する定常偏差



外乱に対する偏差(r = 0):

$$E(s) = -Y(s) = -P(s)(K(s)E(s) + D(s))$$

外乱から偏差までの伝達関数:

$$G_{ed}(s) \triangleq \frac{-P(s)}{1 + P(s)K(s)} \qquad \left(E(s) = G_{ed}(s)D(s)\right)$$

外乱に対する定常偏差:

最終値の定理

$$e_s \triangleq \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sG_{ed}(s)D(s)$$

ステップ外乱に対する定常偏差

ステップ外乱:

$$\mathrm{D(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

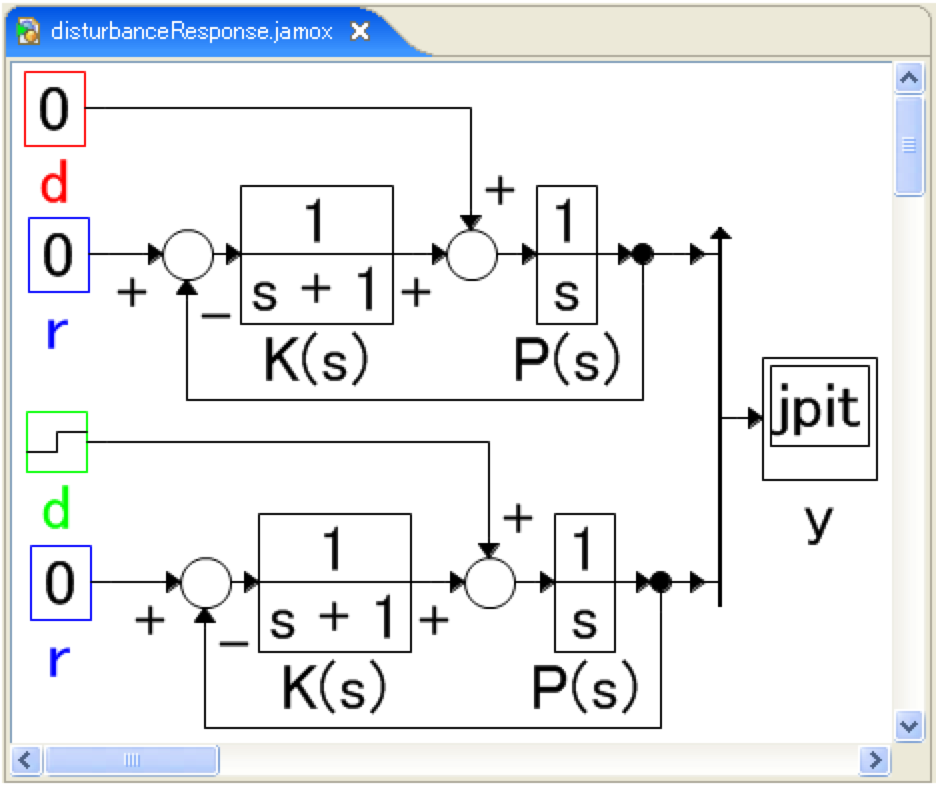
定常(位置)偏差:

$$\mathrm{e_s} = \lim_{\mathrm{s}\to 0} \mathrm{s G_{ed}(s)} \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{G_{ed}(0)} = \frac{-\mathrm{P(0)}}{1+\mathrm{P(0)K(0)}}$$

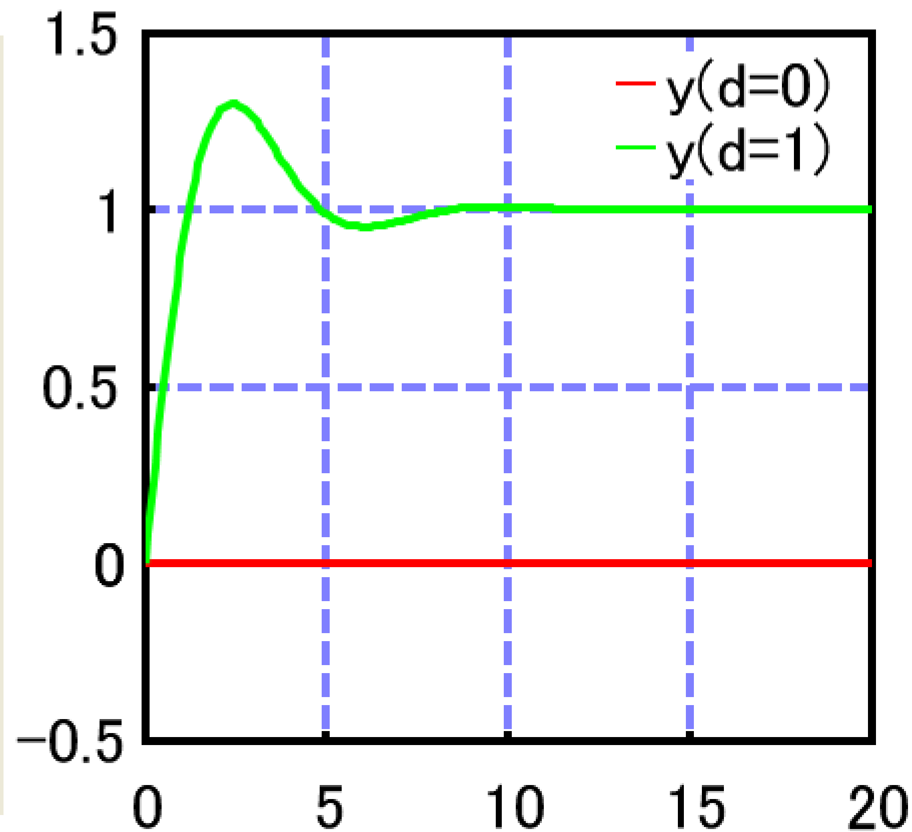
K(s)が積分器をもつ

$$\left(K(s) = \frac{*}{s^l} \right) \Rightarrow \mathrm{K(0)} = \infty \Rightarrow \mathrm{e_s} = 0$$

外乱に対する定常偏差

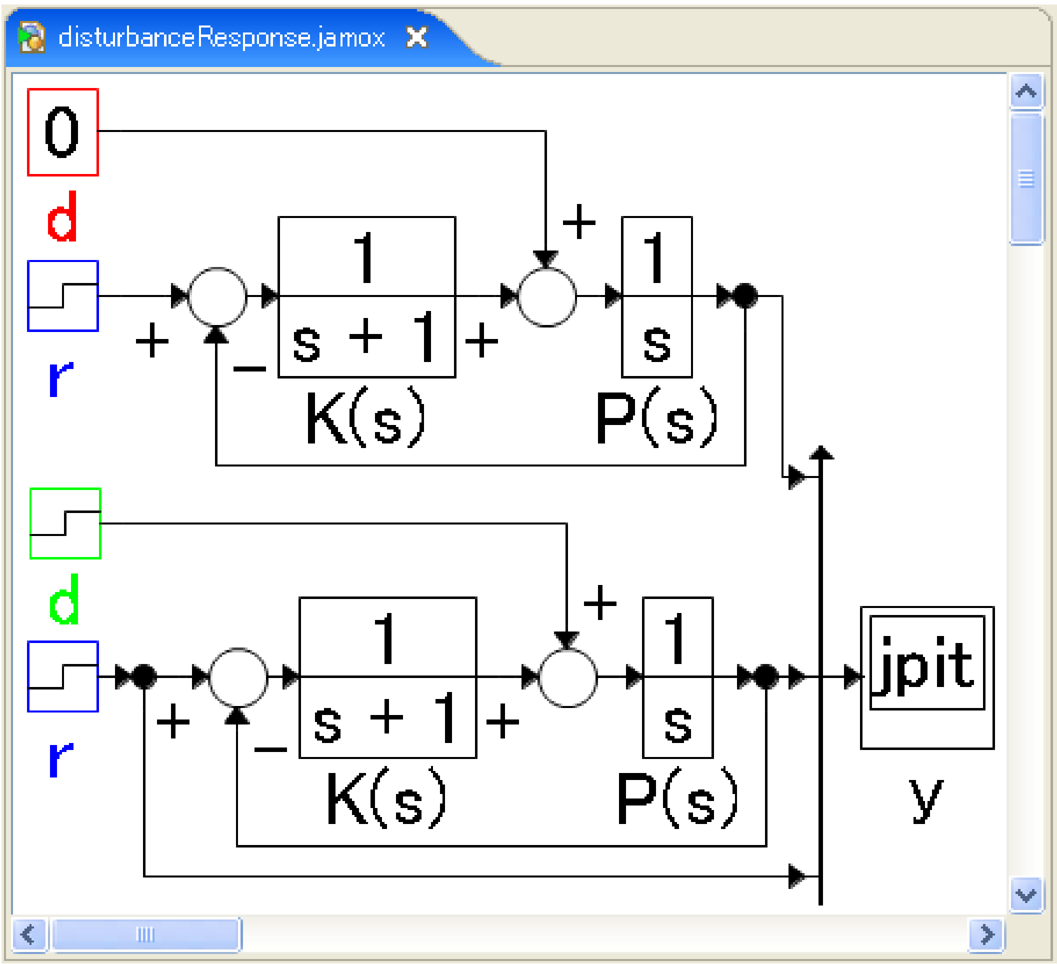


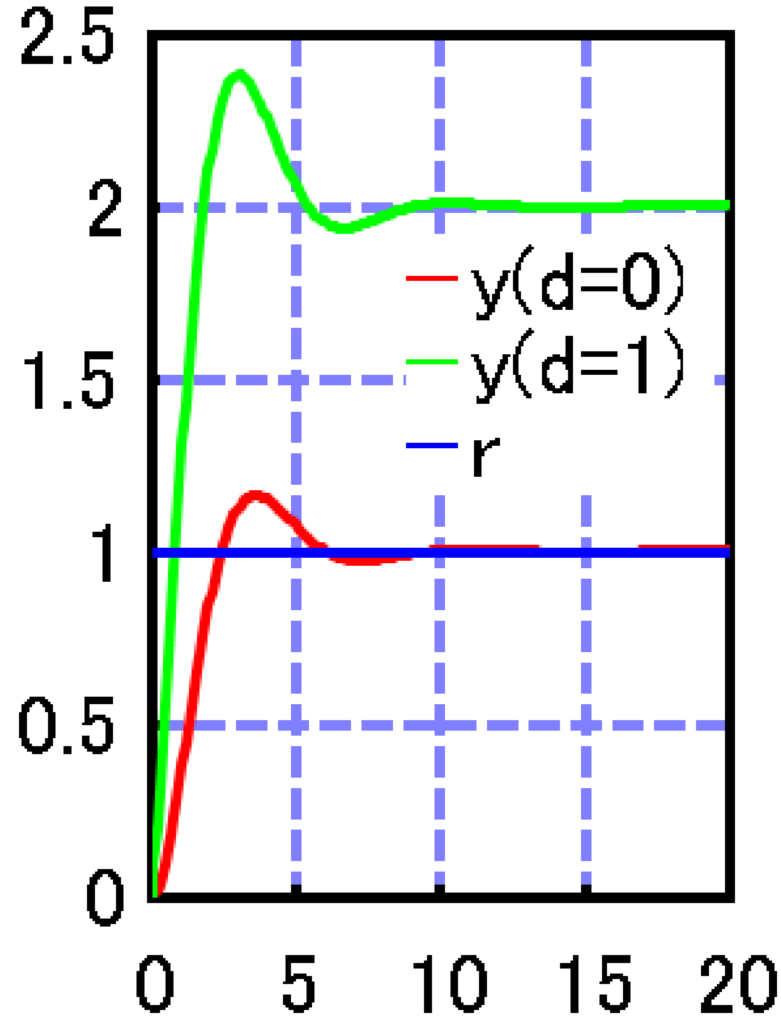
disturbanceResponse.jamox
0
d
0
r
1
s + 1
K(s)
1
s
P(s)
+
+
+
−
jpit
y
d
0
r
1
s + 1
K(s)
1
s
P(s)
+
+
+
−



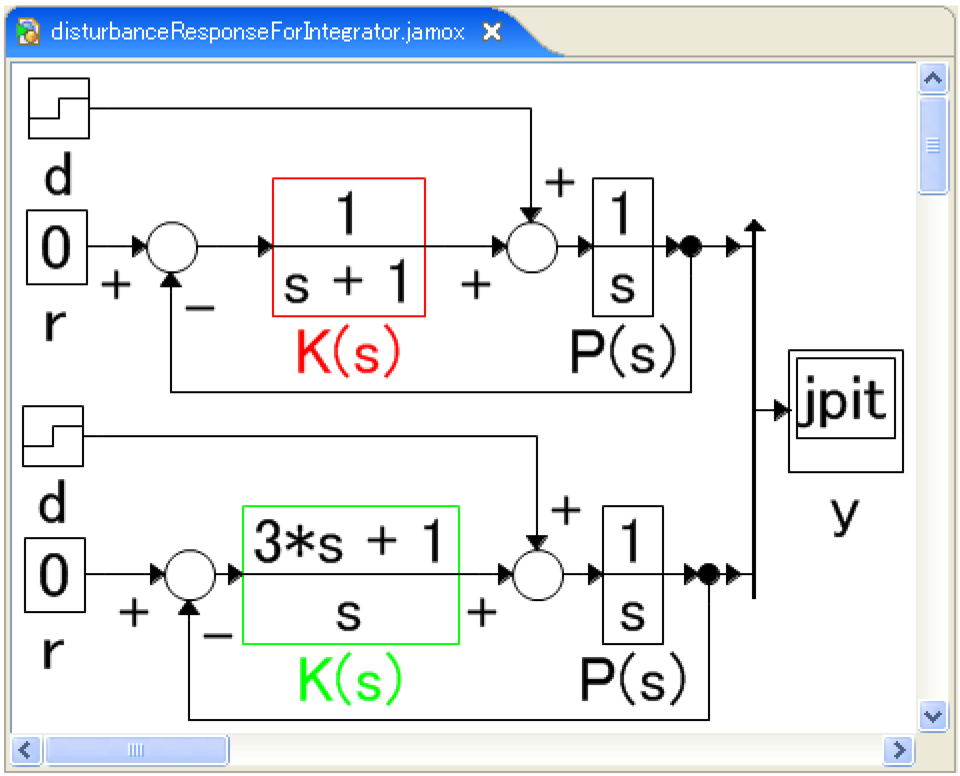
y(d=0)
y(d=1)
1.5
1
0.5
0
−0.5
0
5
10
15
20

外乱に対する定常偏差(ステップ目標)

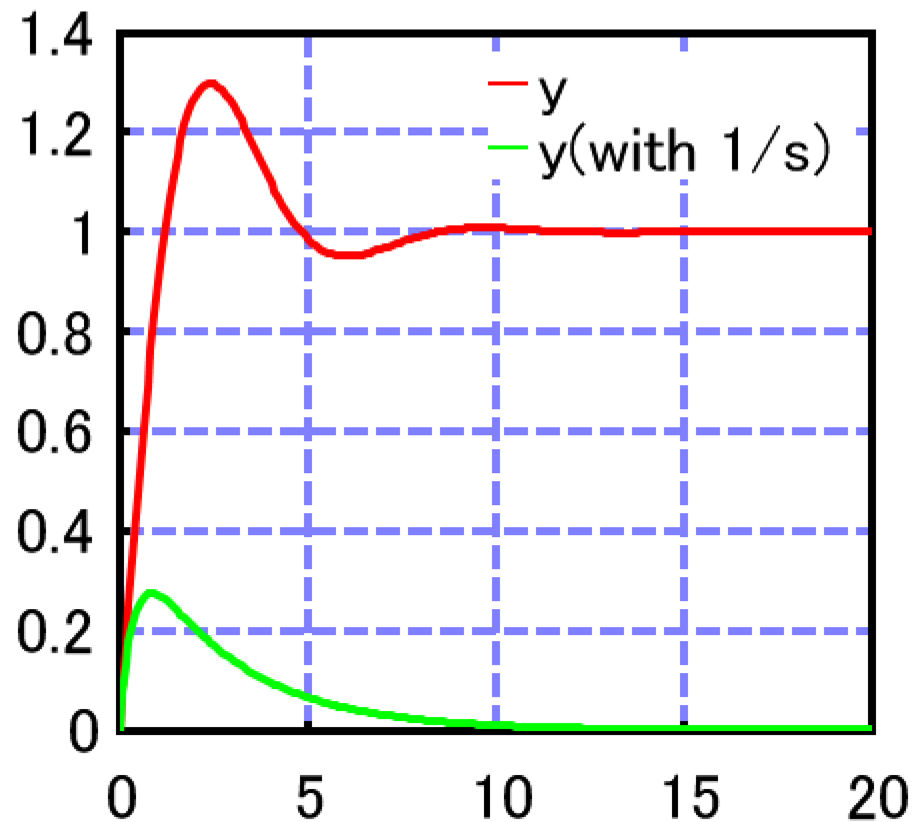




積分器による外乱抑制

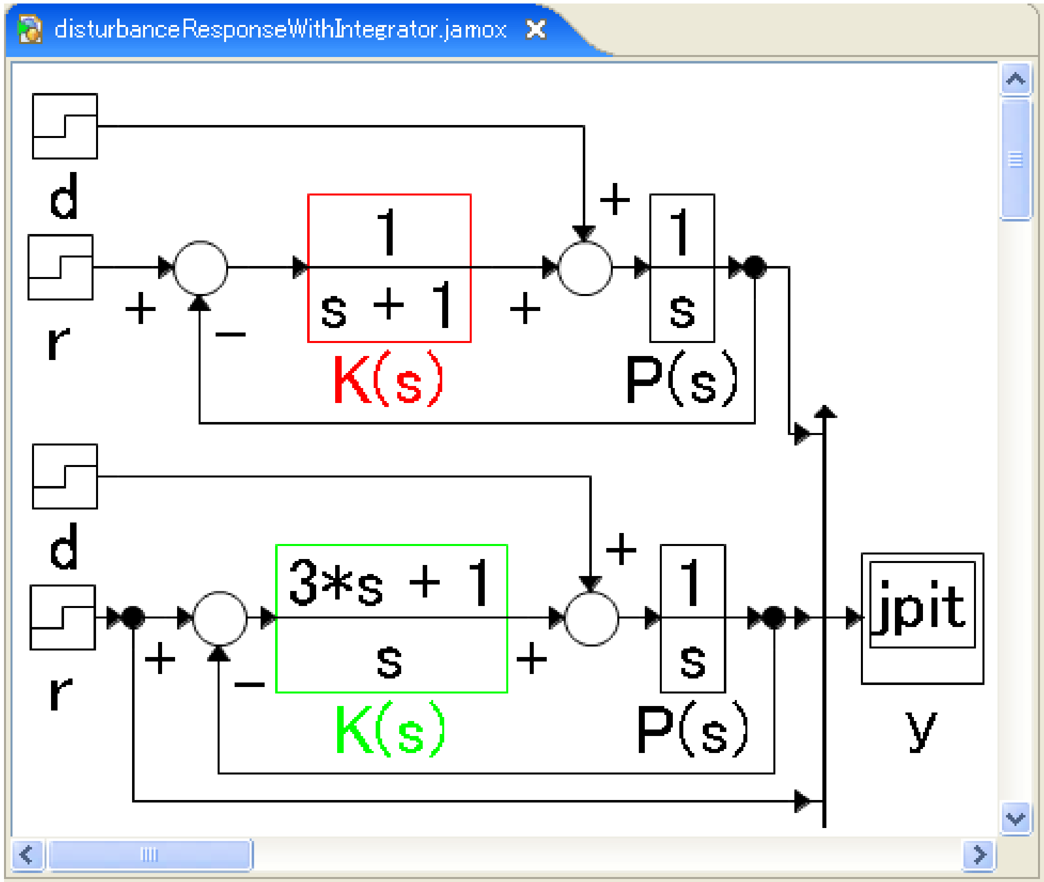


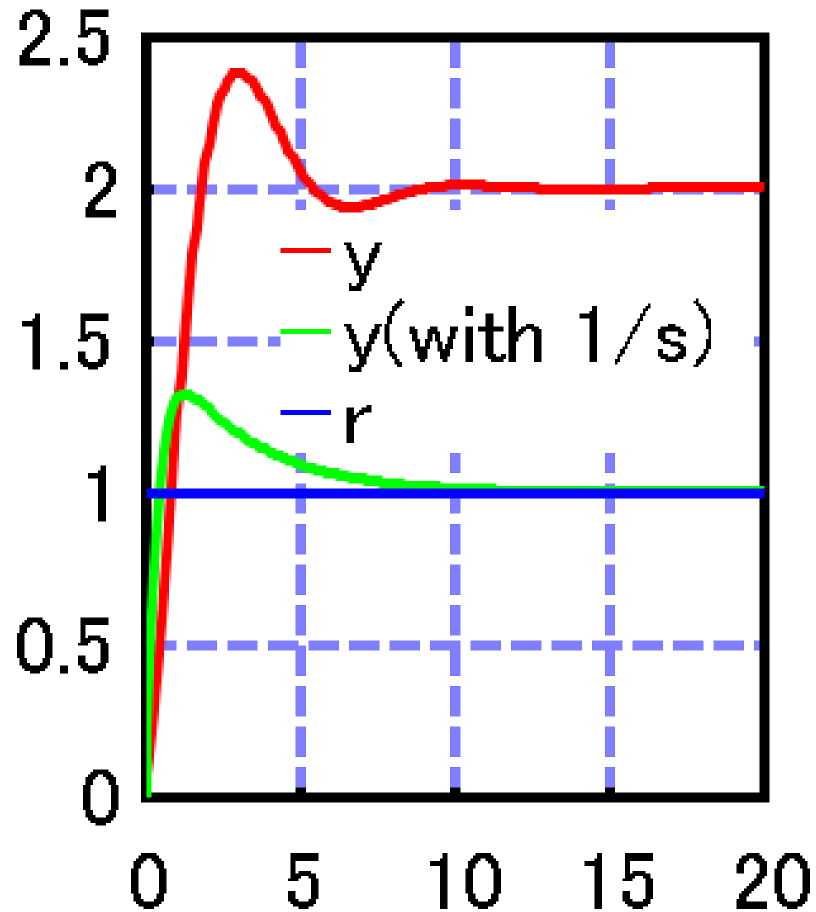
disturbanceResponseForIntegrator.jamox
d
0
r
+
−
1
s + 1
K(s)
+
1
s
P(s)
jpit
y
d
0
r
+
−
3*s + 1
s
K(s)
+
1
s
P(s)



y
y(with 1/s)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20

積分器による外乱抑制(ステップ目標)





演習1:内部安定性

制御対象と制御器が次式で与えられているとする。

(a) $$P(s) = \frac{s-2}{s+3} \quad K(s) = \frac{s+3}{s-2}$$

(b) $$P(s) = \frac{1}{s^2-1} \quad K(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

1. 外部信号(目標値r(t)、外乱d(t))から要素出力(制御入力u(t)、制御量y(t))への4個の伝達関数を計算し、内部安定性を調べよ。
2. 特性方程式の根を計算し、内部安定性を調べよ。
3. ステップ目標と微小外乱を加えた場合の、制御入力u(t)と制御量y(t)の時間応答を求めよ。

演習2：外乱に対する定常偏差

- 制御対象

$$P(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 2}$$

制御器

$$K_1(s) = 2, \quad K_2(s) = 5, \quad K_3(s) = \frac{2s + 1.25}{s}$$

目標値：$r(t) = 0$,入力外乱：$d(t) = u_s(t)$

(単位ステップ)

制御系の時間応答のグラフを求めよ。

- 各制御系について、出力$y(t)$の定常値$y(\infty)$を数値で求め、値を比較し、考察せよ。