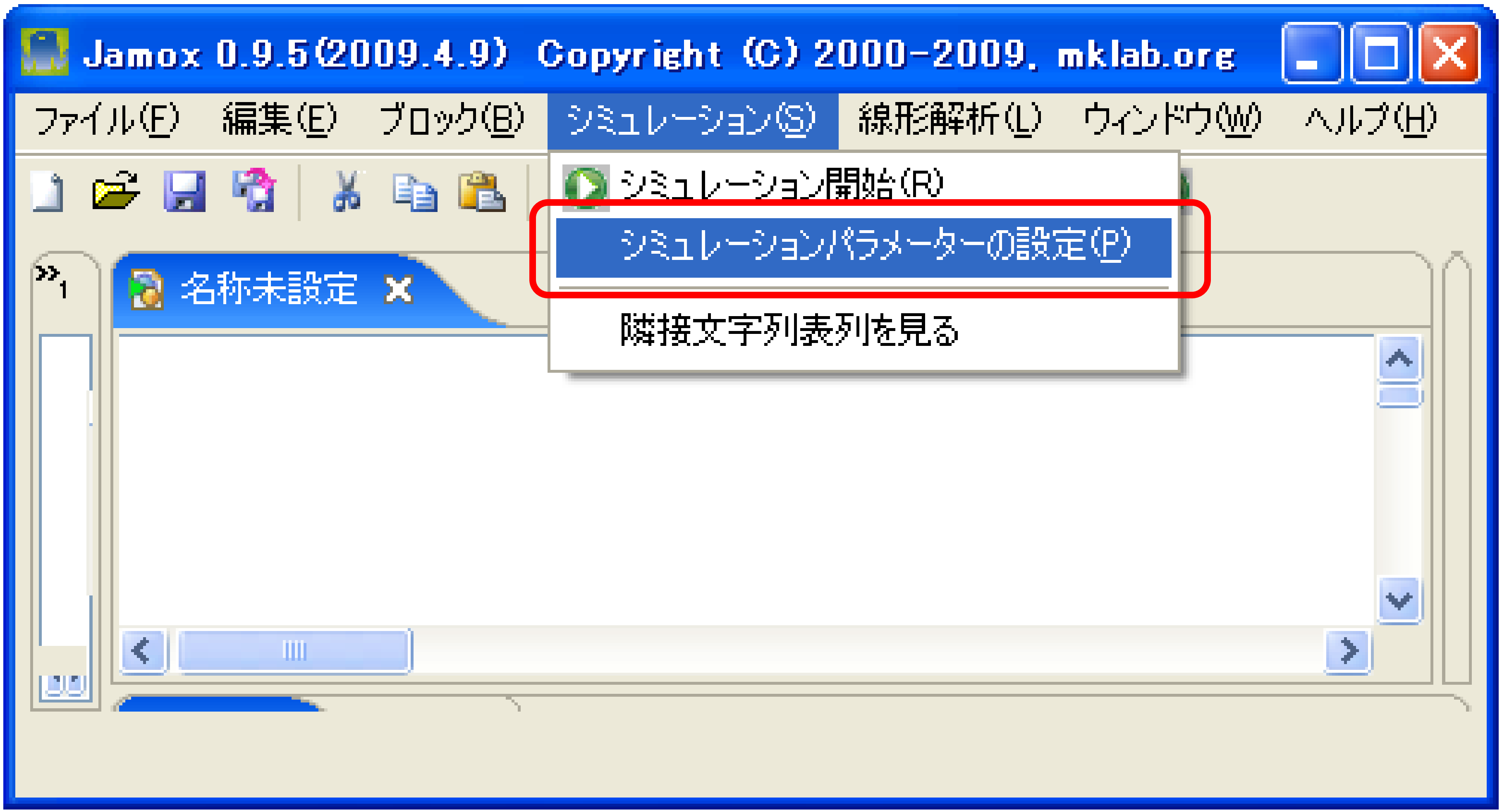
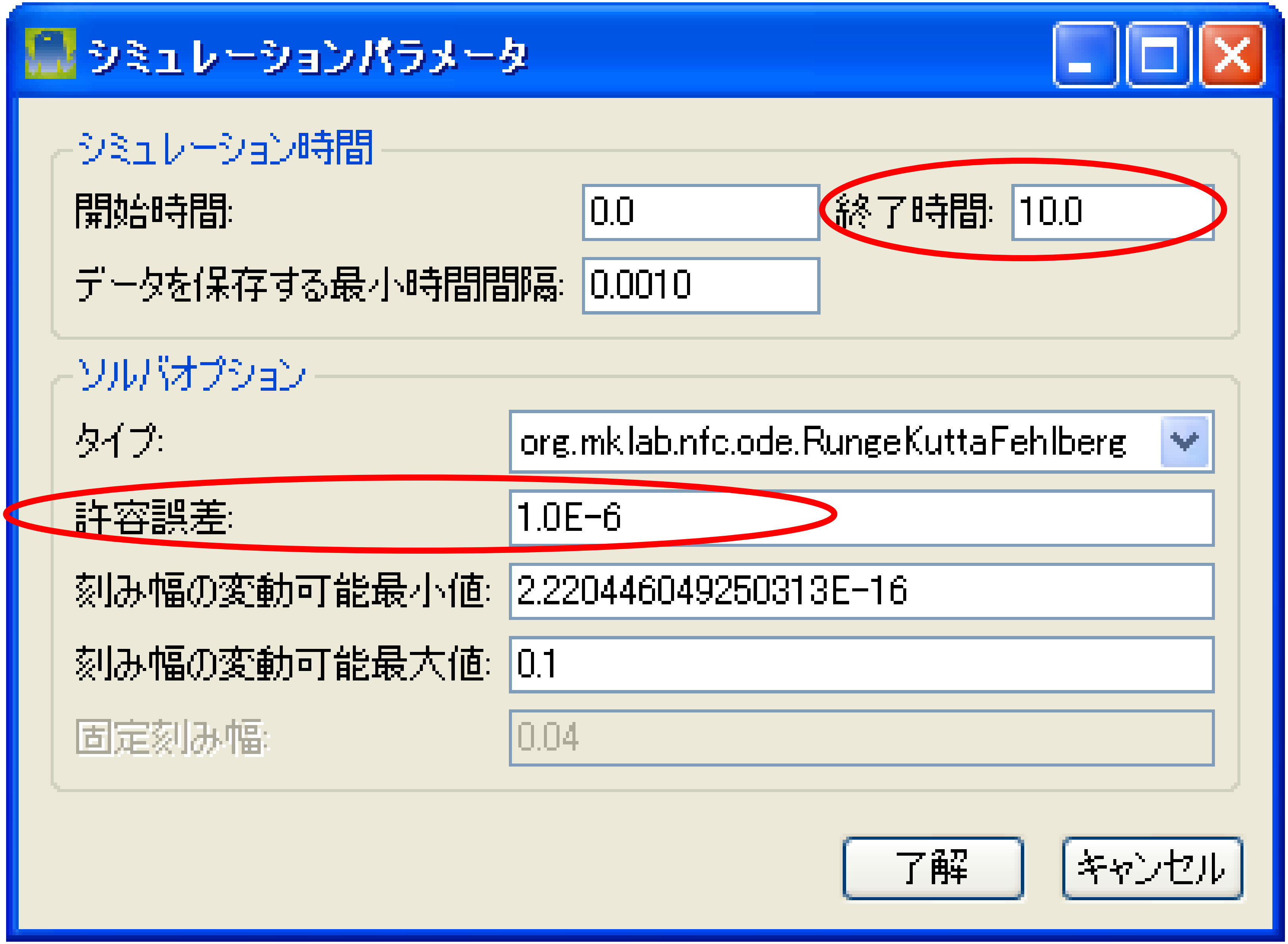
第4回

- シミュレーションパラメータの設定
- 一次系の時間応答
- 二次系の時間応答

シミュレーションパラメータの設定(1/2)



シミュレーションパラメータの設定(2/2)



伝達関数と入出力関係

$$\boxed{\text{伝達関数} \triangleq \frac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}}$$

「全ての初期値を0とする」

伝達関数:

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)}$$

（入力：$u(t)$, 出力：$y(t)$）

$$\begin{pmatrix} Y(s) \triangleq \mathcal{L}[y(t)] \\ U(s) \triangleq \mathcal{L}[u(t)] \end{pmatrix}$$

⇩

入出関係:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

動的システムの時間応答

出力応答:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \qquad \left(Y(s) = G(s)U(s)\right)$$

インパルス応答:

$$u(t) = \delta(t) \quad \text{（単位インパルス関数）}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \qquad \left(U(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1\right)$$

ステップ応答:

$$u(t) = u_s(t) \quad \text{（単位ステップ関数）}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] \qquad \left(U(s) = \mathcal{L}[u_s(t)] = \frac{1}{s}\right)$$

一次系の応答

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

$\left(K : \text{ゲイン、}T : \text{時定数}\right)$

分母の定数項＝1

インパルス応答:

$$y(t)=\frac{K}{T}e^{-t/T}$$

$$y(\infty)=0$$

$$y(0)=\frac{K}{T}$$

ステップ応答:

$$y(t)=K\left(1-e^{-t/T}\right)$$

$$y(\infty)=K$$

$$\dot{y}(0)=\frac{K}{T}$$

$$y(T)\approx 0.632y(\infty)$$

一次系の応答の特徴

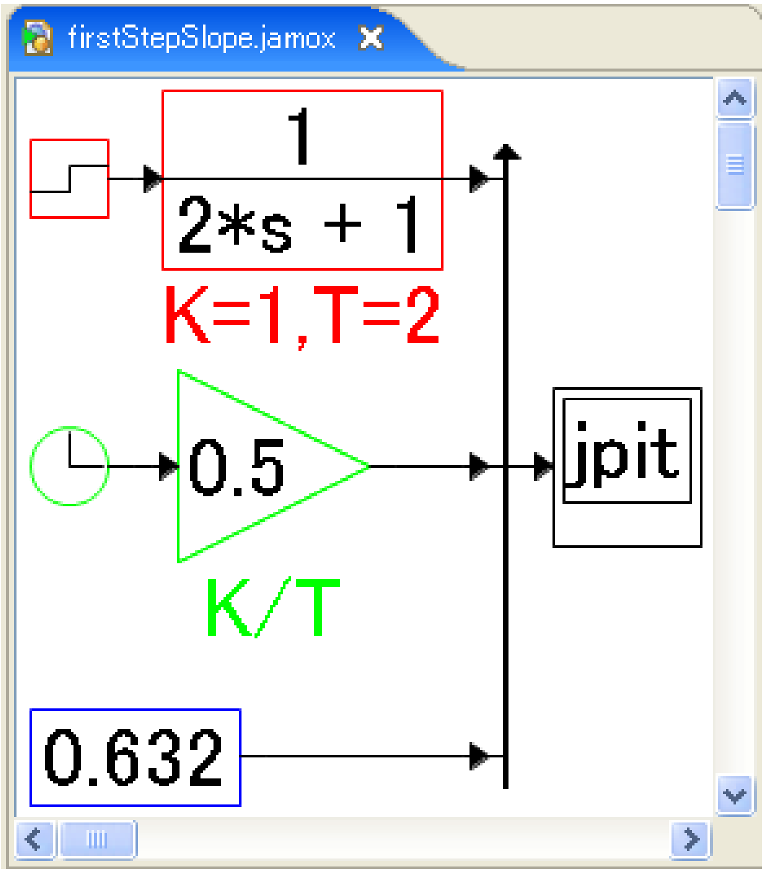
ステップ応答の特徴:

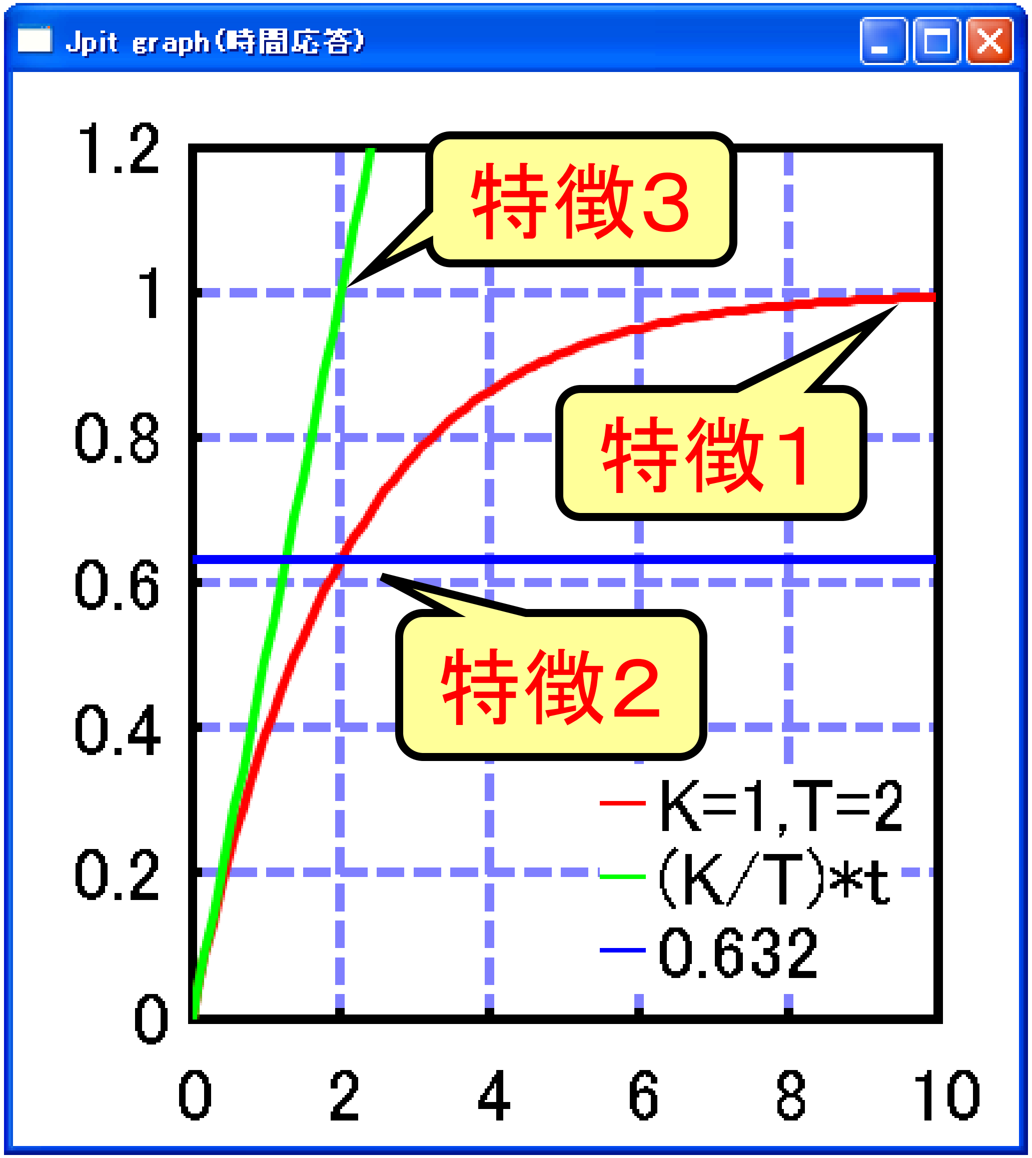
1. 定常値$y(\infty)$は、ステップの高さのK倍
2. 時刻Tで、定常値の63.2%
3. 初期速度のまま進めば、時刻Tで定常値

係数と応答の関係:

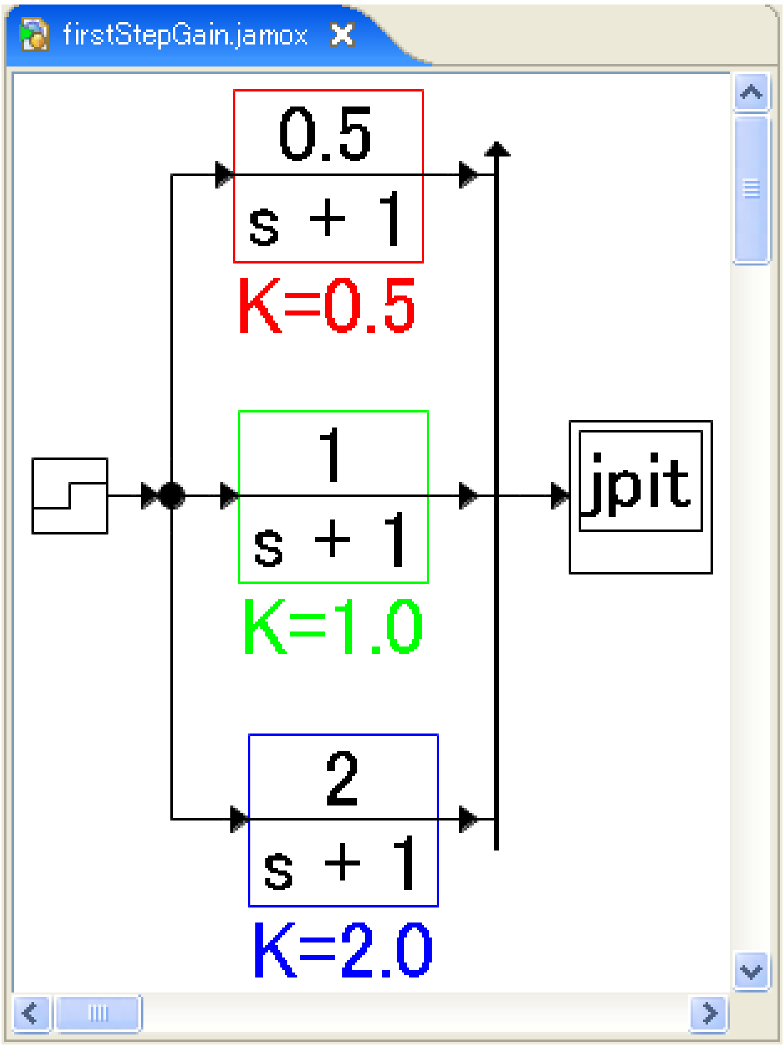
- ゲイン(K)が大きい ➡ 出力倍率が大きい
- 時定数(T)が大きい ➡ 応答が遅い

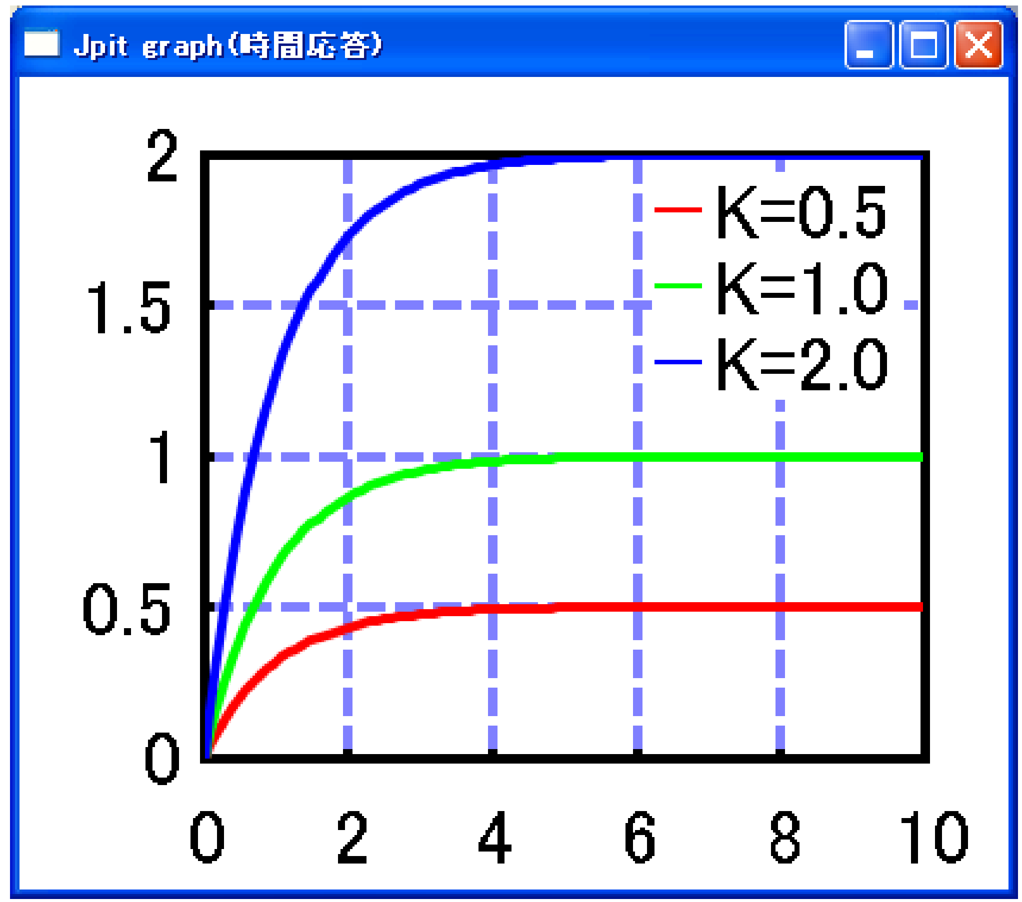
一次系のステップ応答の特徴



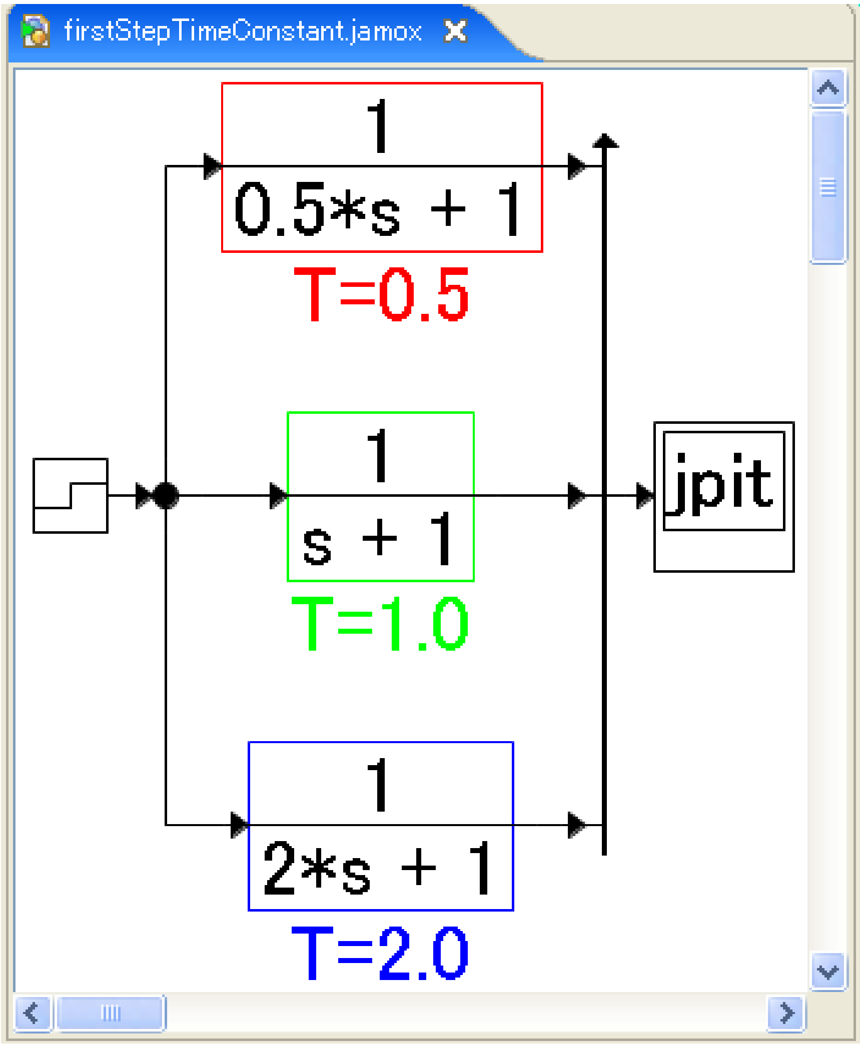


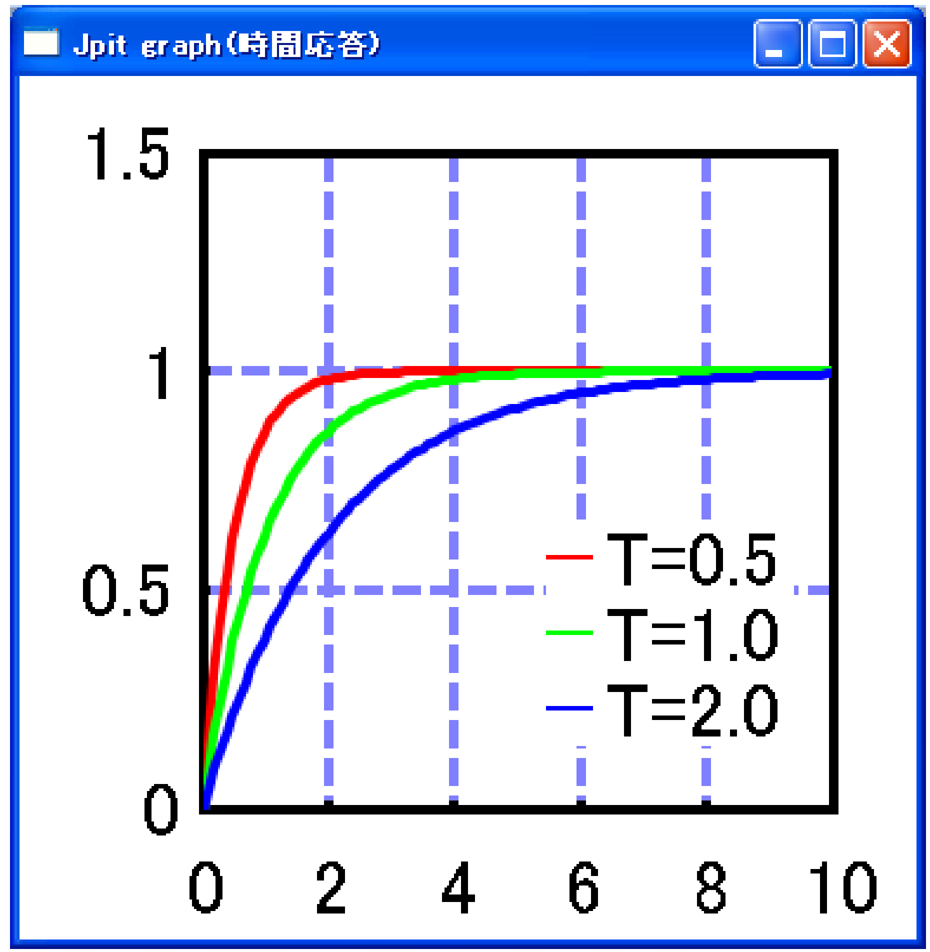
一次系のゲインと応答の関係





一次系の時定数と応答の関係





二次系の(ステップ)応答

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

分母の2次係数＝1

$\left(K : \text{ゲイン}、\zeta : \text{減衰係数}、\omega_n : \text{自然角周波数}\right)$

$\left(|\zeta| < 1\right)$

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta)\right\}$$

$$\omega_d \triangleq \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\theta \triangleq \tan^{-1}\left(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta\right)$$

$\left(|\zeta| = 1\right)$

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)\right\}$$

$$\beta \triangleq \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

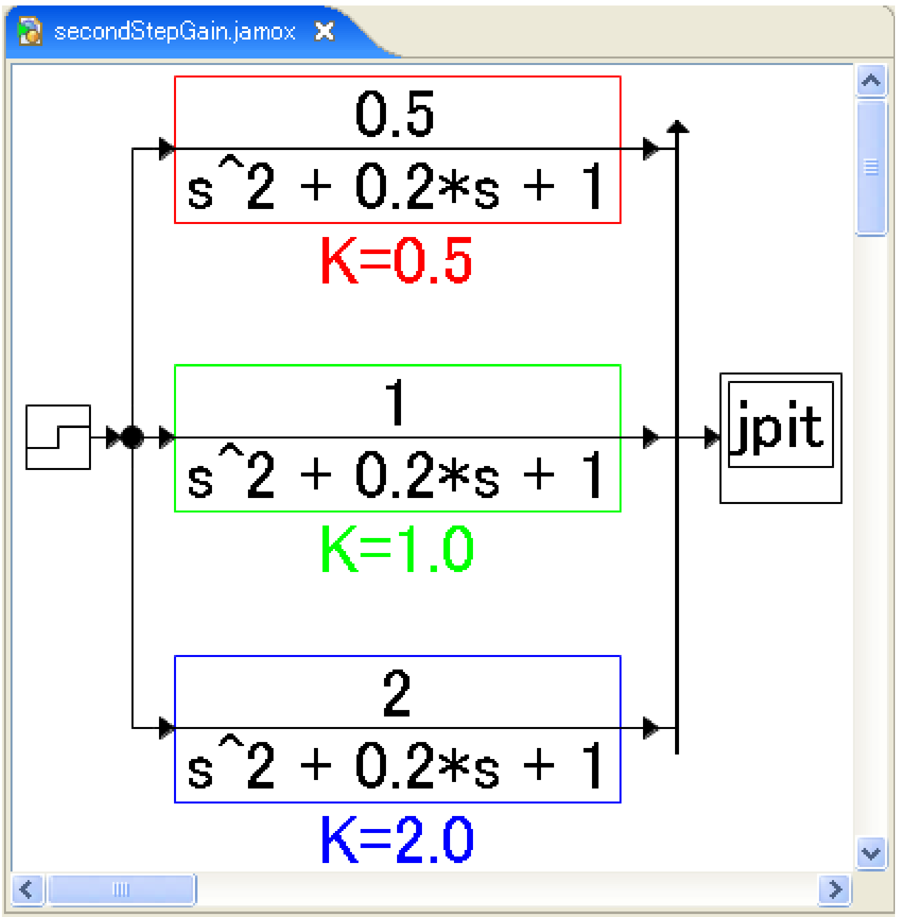
$\left(|\zeta| > 1\right)$

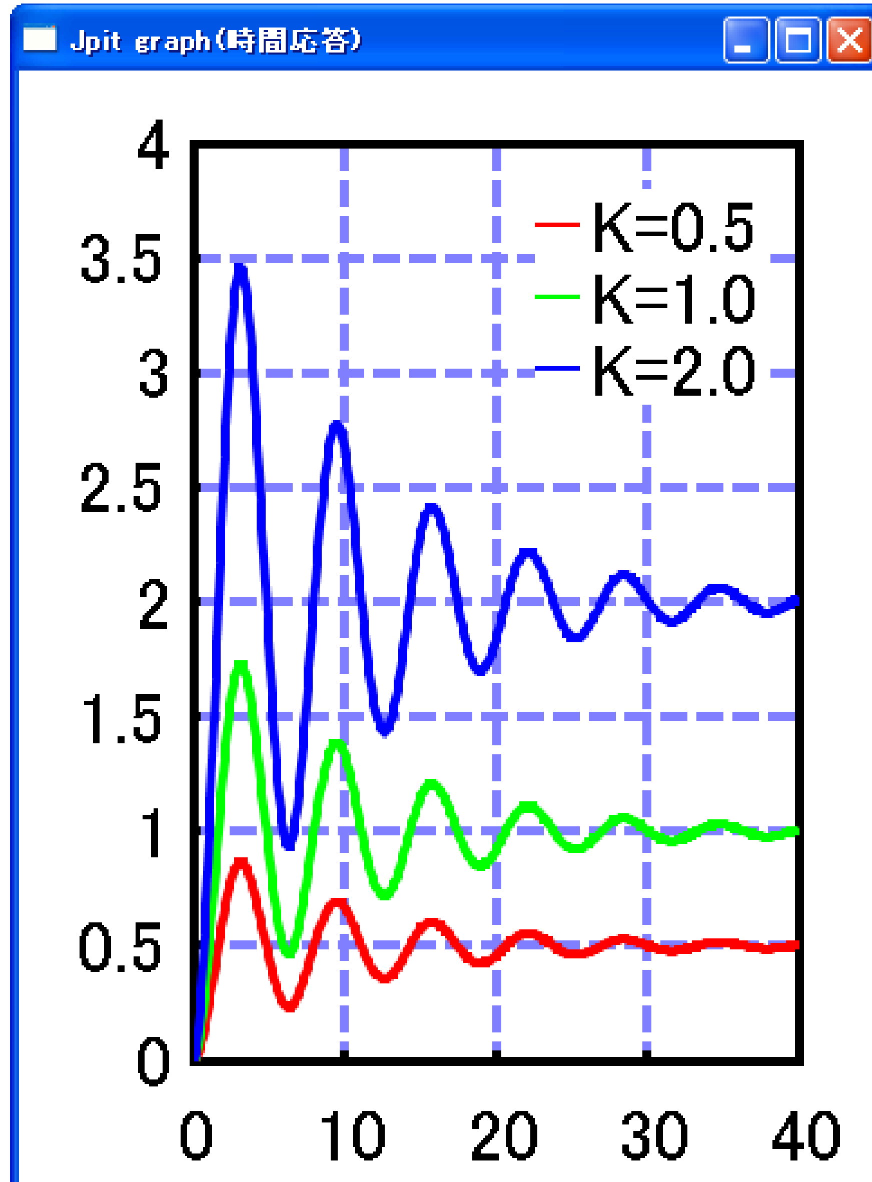
$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta}\left((\zeta+\beta)e^{\omega_n\beta t} - (\zeta-\beta)e^{-\omega_n\beta t}\right)\right\}$$

二次系の係数とステップ応答の関係

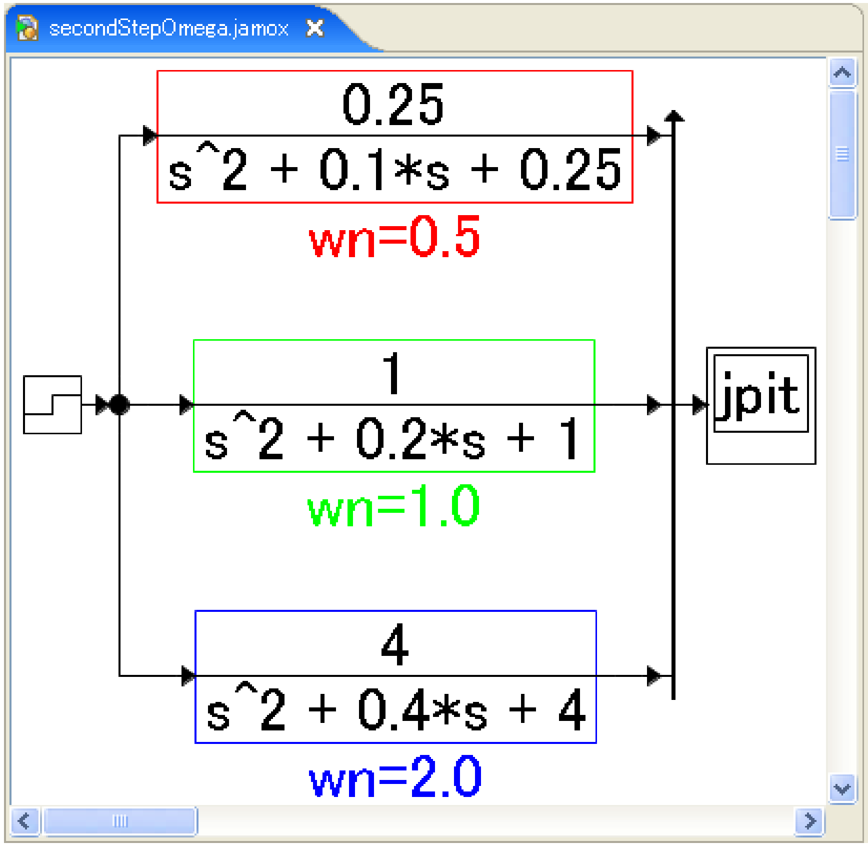
1. ゲイン（ K ）が大きい
   ➡ 出力倍率が大きい(定常値$y(\infty)=K$)
2. 自然角周波数（ω_n）が大きい
   ➡ 応答が速い
3. 減衰係数（ ζ ）
   - $(\zeta < 0)$ 発散（不安定）
   - $(\zeta = 0)$ 持続振動（安定限界）
   - $(0 < \zeta < 1)$ 振動しながら収束（不足制動）
   - $(\zeta = 1)$ オーバーシュート無しで収束（臨界制動）
   - $(\zeta > 1)$ オーバーシュート全く無しで収束（過制動）

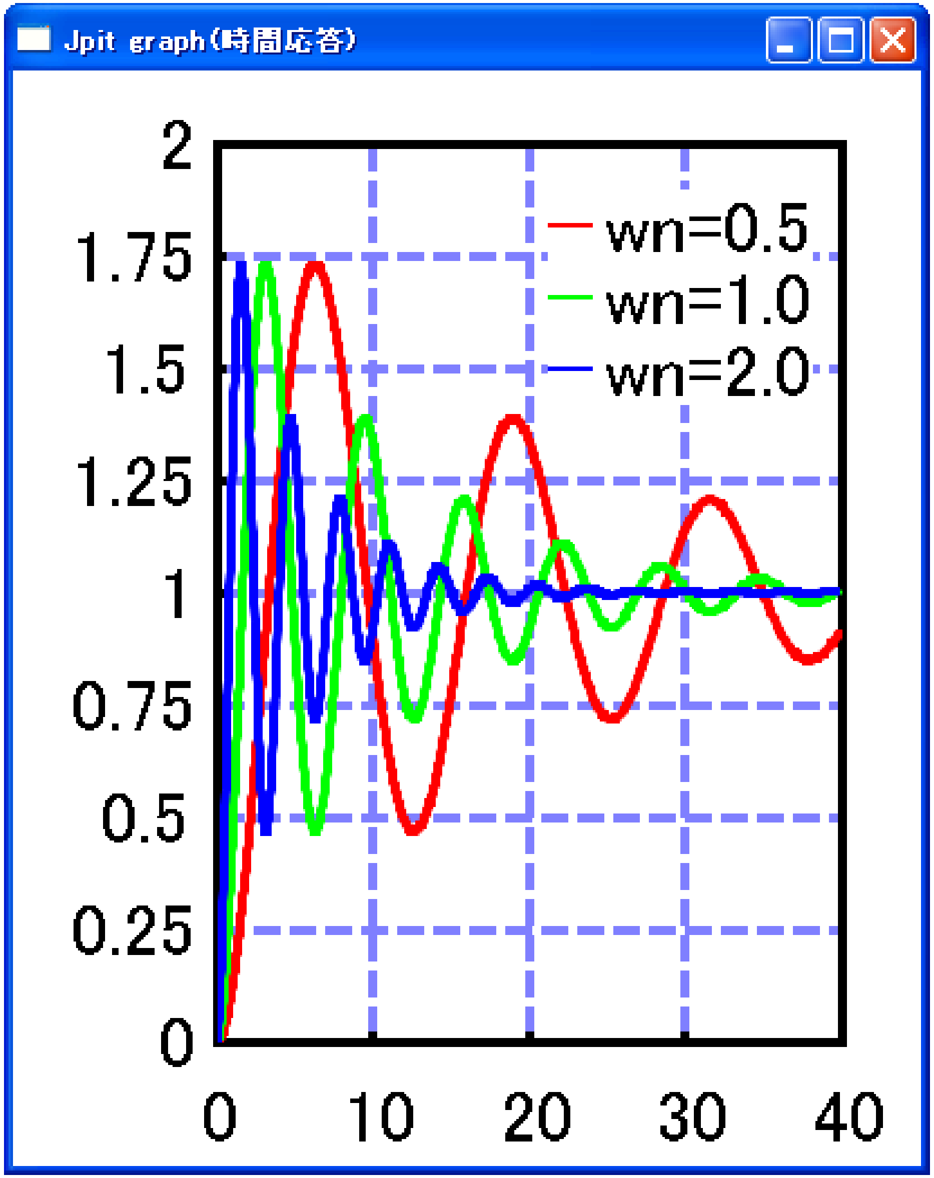
二次系のゲインと応答の関係



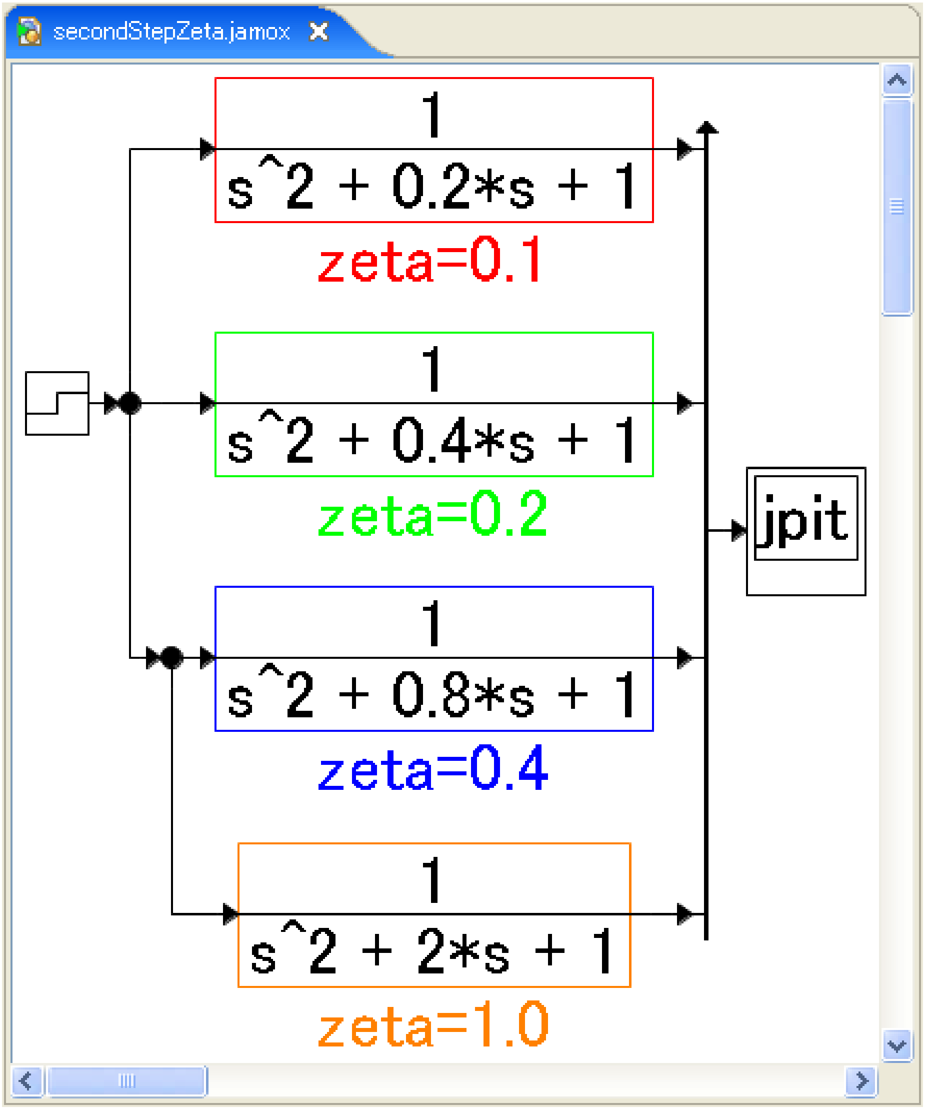


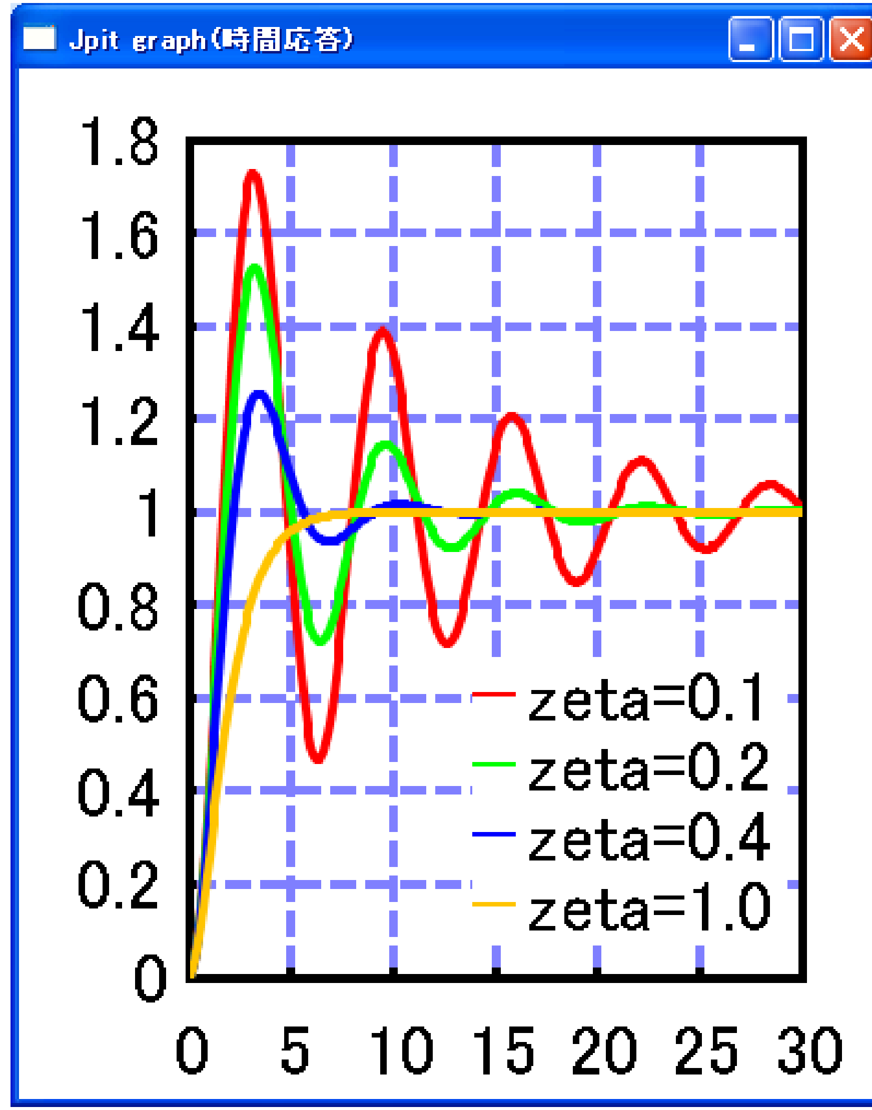
二次系の自然角周波数と応答の関係



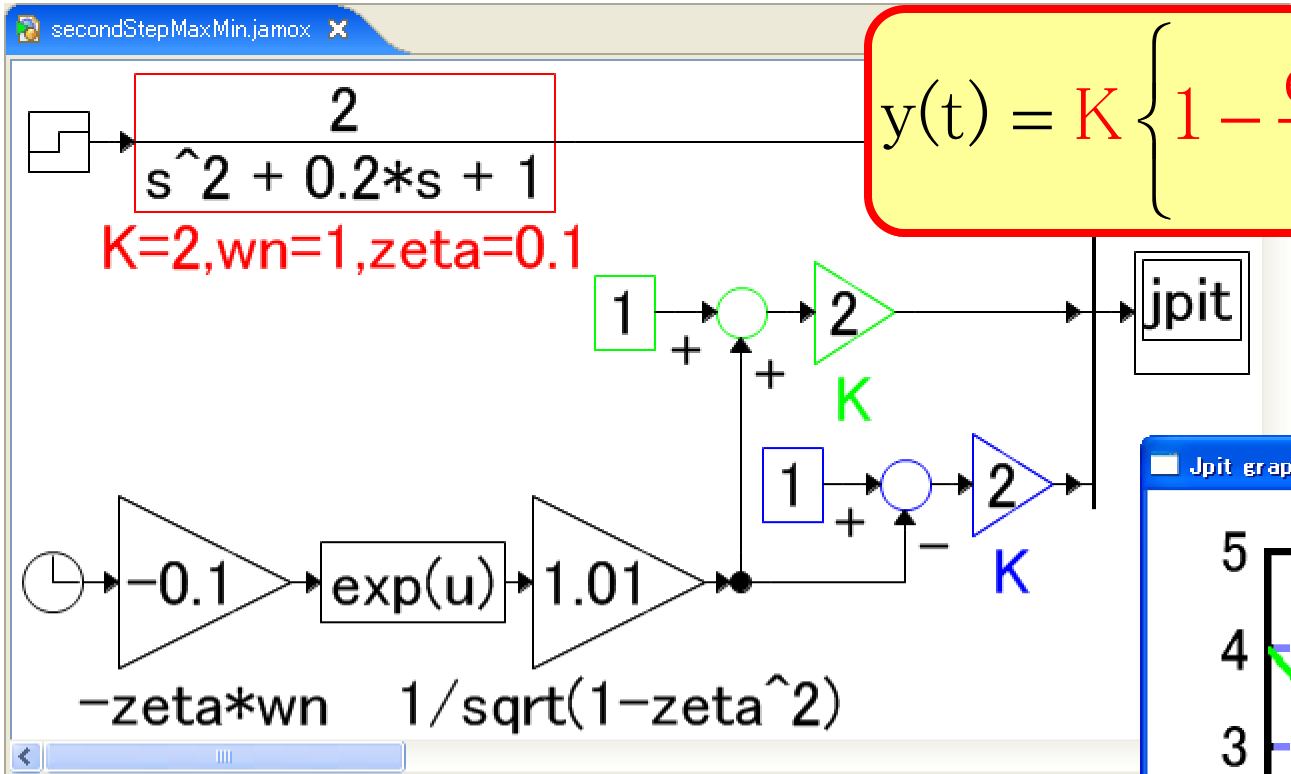


二次系の減衰係数と応答の関係





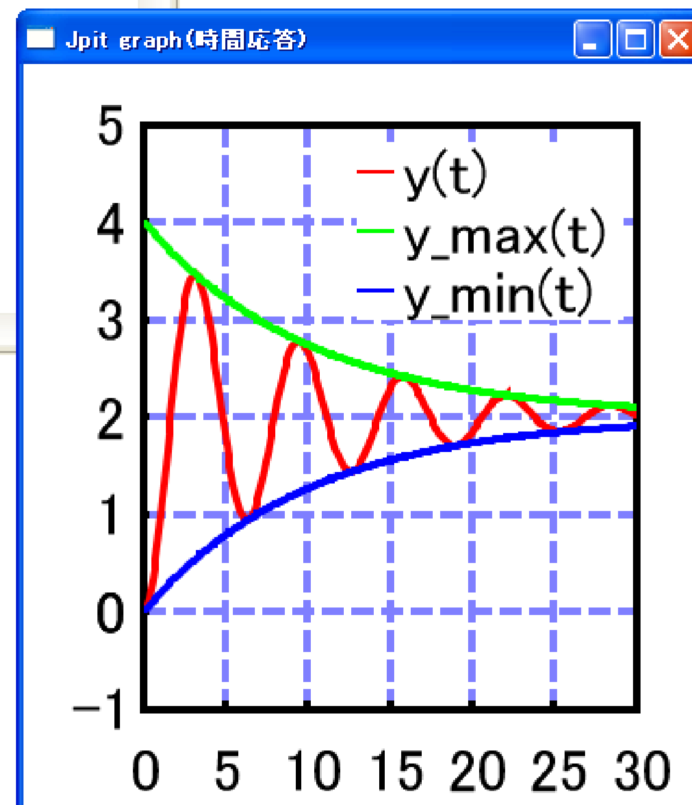
二次系の指数関数的な収束



$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta)\right\}$$

$$y_{max}(t) = K\left(1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$y_{min}(t) = K\left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$



演習1　一次系の係数と応答の関係

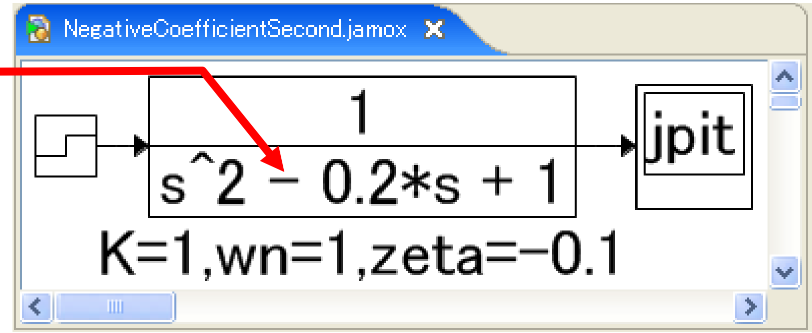
- 一次系について、ゲインおよび時定数の変更とステップ応答の計算を繰り返し実行し、各係数とステップ応答の関係について考察せよ。
- 一次系について、ゲインに負の値($K < 0$)や時定数に負の値($T \leq -2$)を設定すると、ステップ応答はどのようになるか？

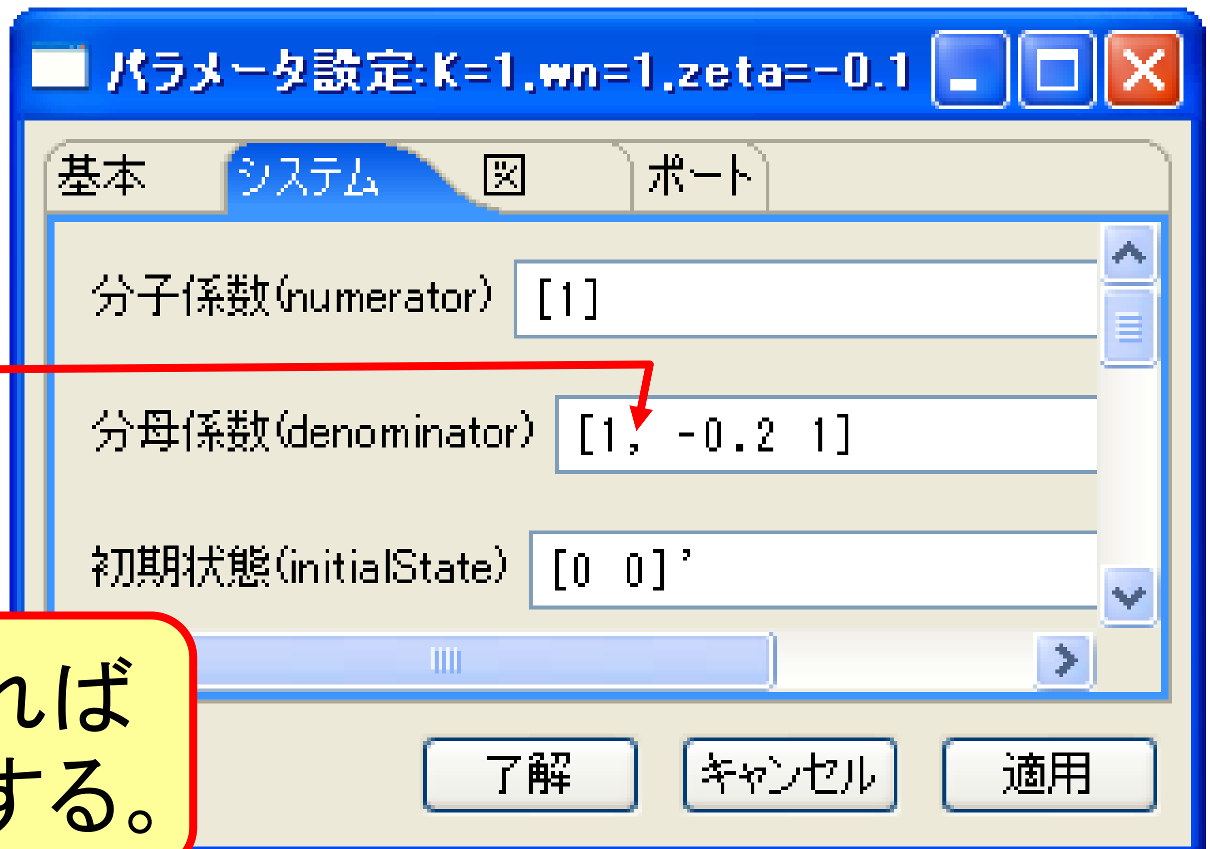
演習２　二次系の係数と応答の関係

- 二次系について、ゲイン、自然角周波数、減衰係数の変更とステップ応答の計算を繰り返し実行し、各係数とステップ応答の関係について考察せよ。
- 二次系について、ゲインに負の値($\mathrm{K} < 0$)や減衰係数に負の値($-0.5 < \zeta < 0$) を設定すると、ステップ応答はどのようになるか？

負の係数の設定について

負の係数



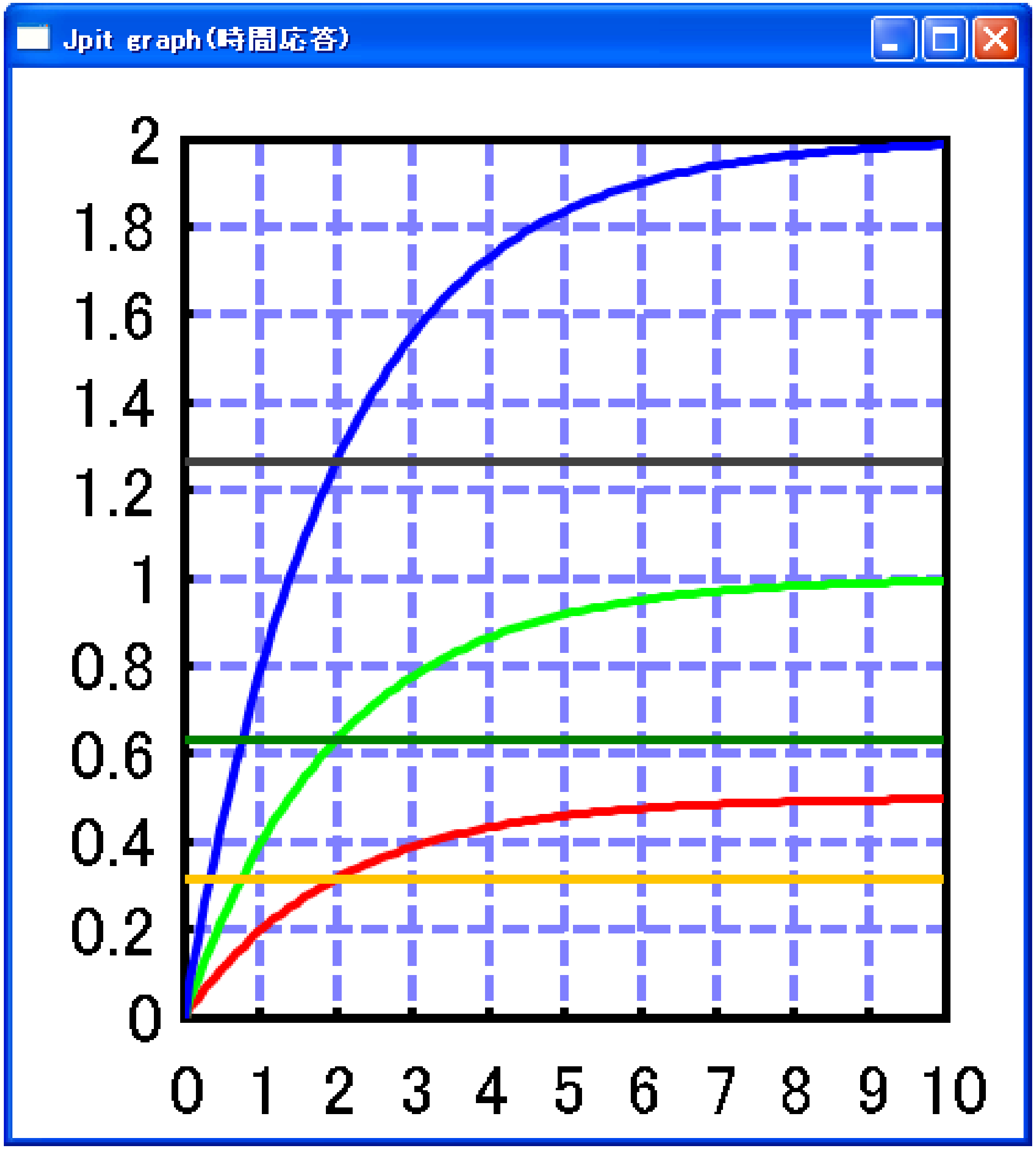


負の係数の前にカンマ

カンマが無ければ引き算を意味する。

演習3　一次系のステップ応答

右グラフは、時定数が等しく、ゲインが異なる、3個の一次系について、ステップ応答が定常値の63.2%に達する時間が等しいことを示すシミュレーション結果である。このグラフを得なさい。



演習4　二次系のステップ応答

右グラフは、二次系のステップ応答である。G1とG2の伝達関数を以下とするとき、G3, G4,G5の伝達関数を求め,このグラフを得よ。

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{2}{s^2 + 0.2s + 1}$$