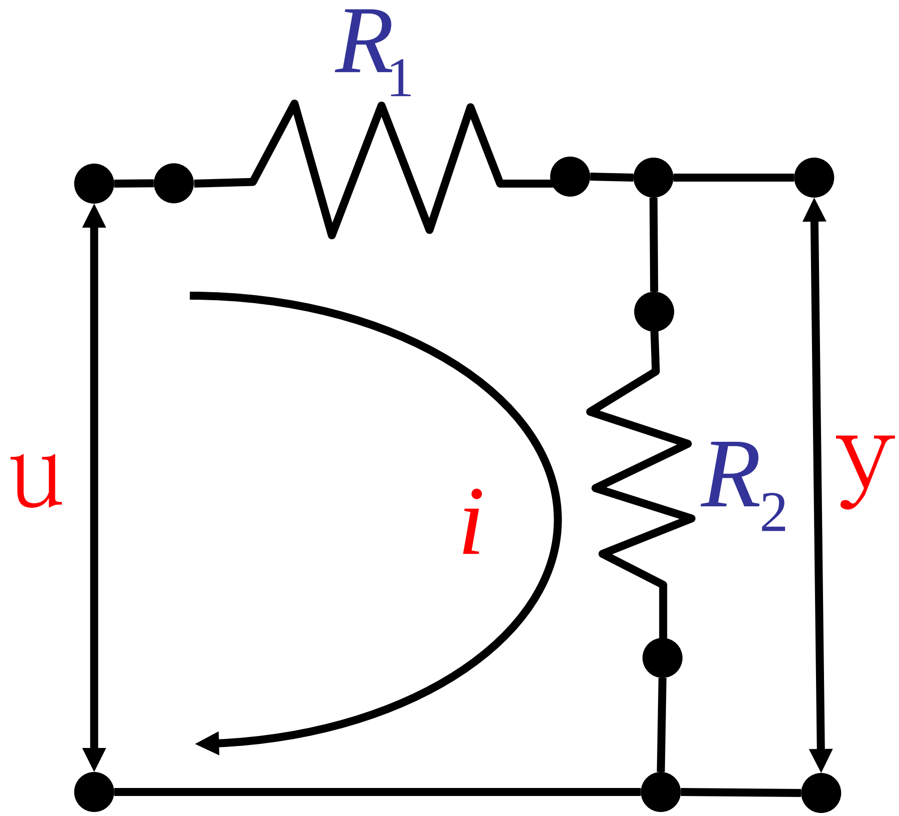
第2回

- 微分方程式表現に基づくブロック線図作成
- 伝達関数

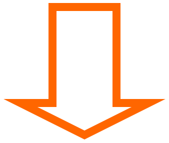
抵抗回路の方程式表現



関係式:

$$u(t) = i(t) \times (R_1 + R_2)$$

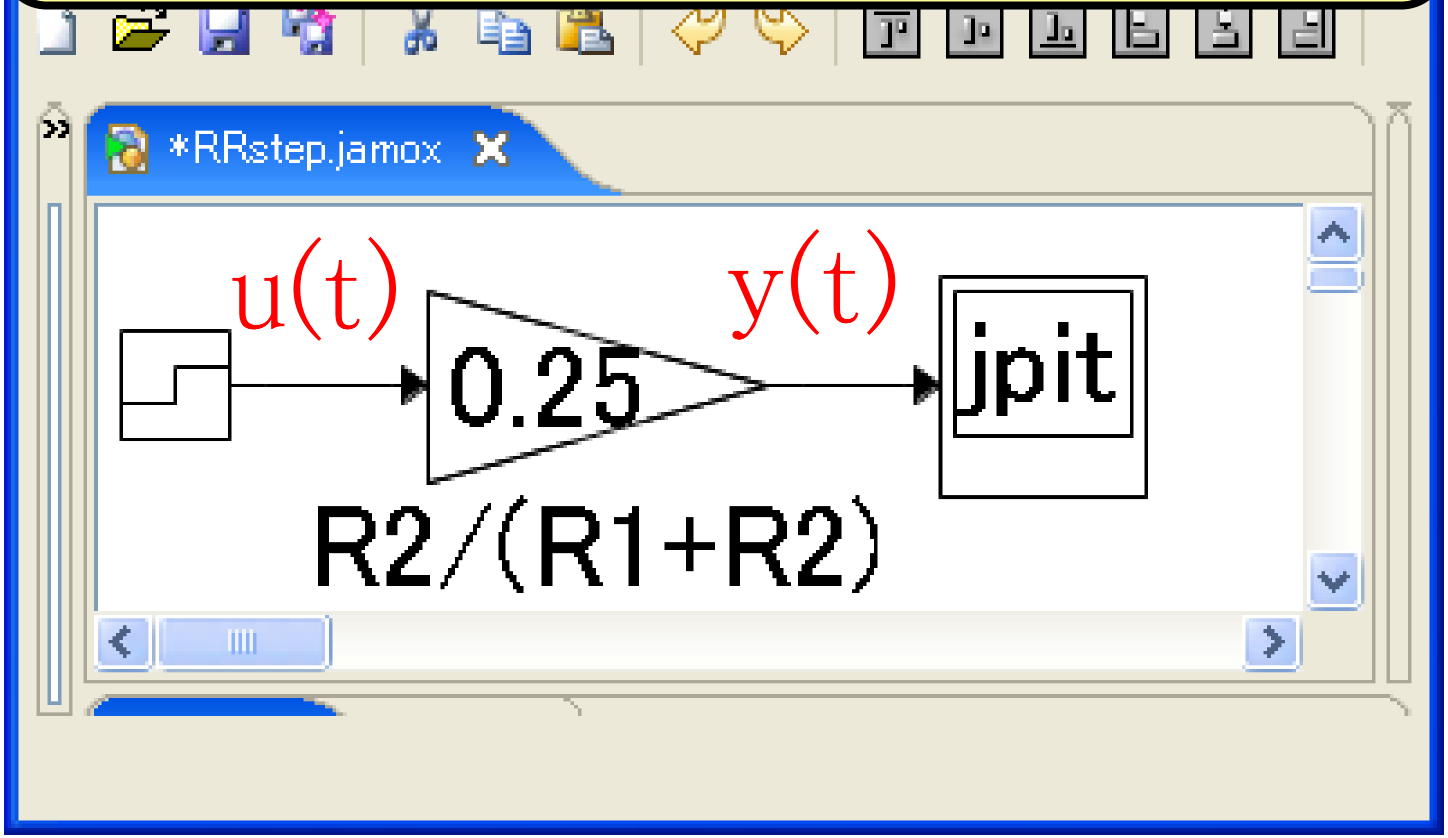
$$y(t) = i(t) \times R_2$$



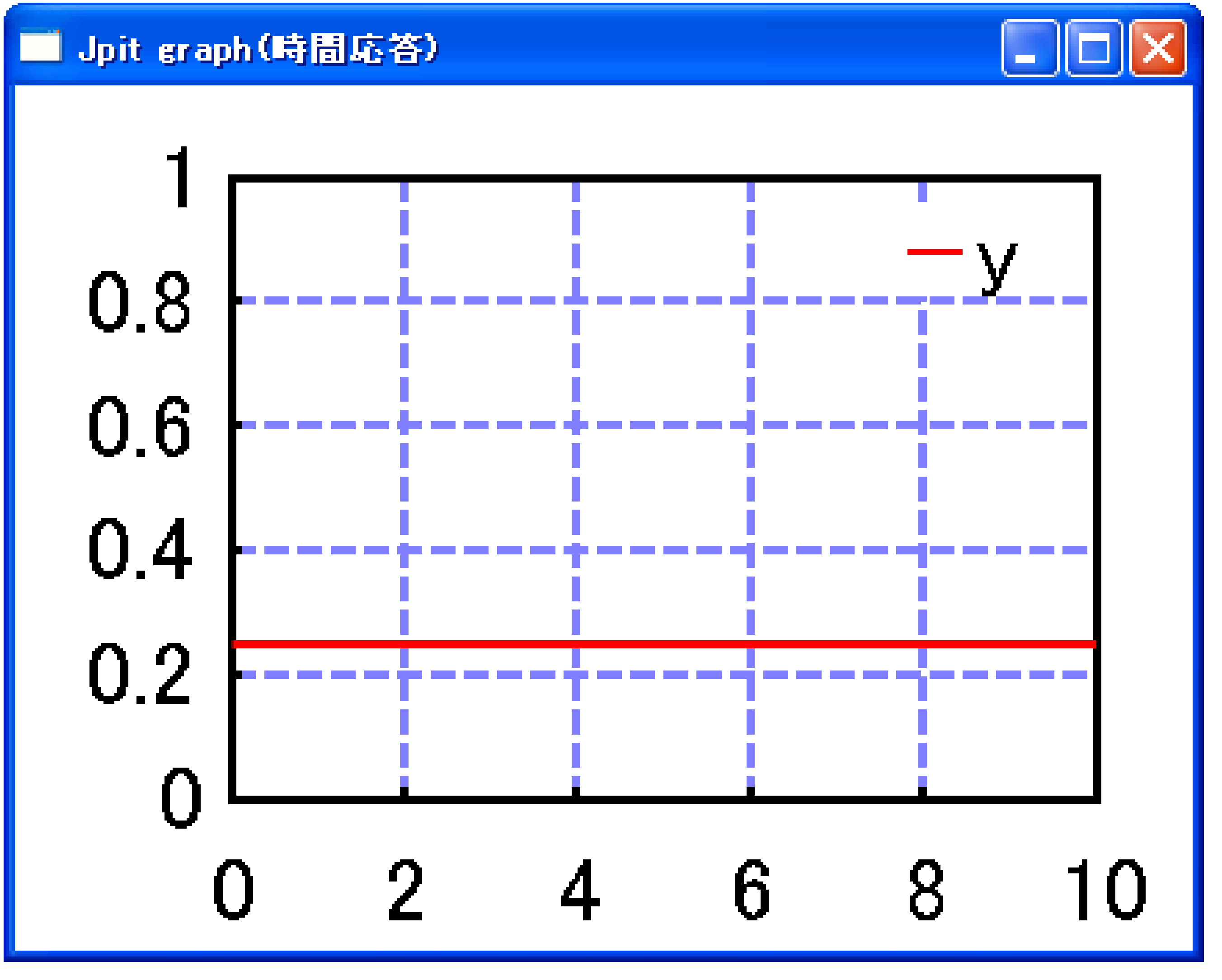
$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u(t)$$

抵抗回路のブロック線図

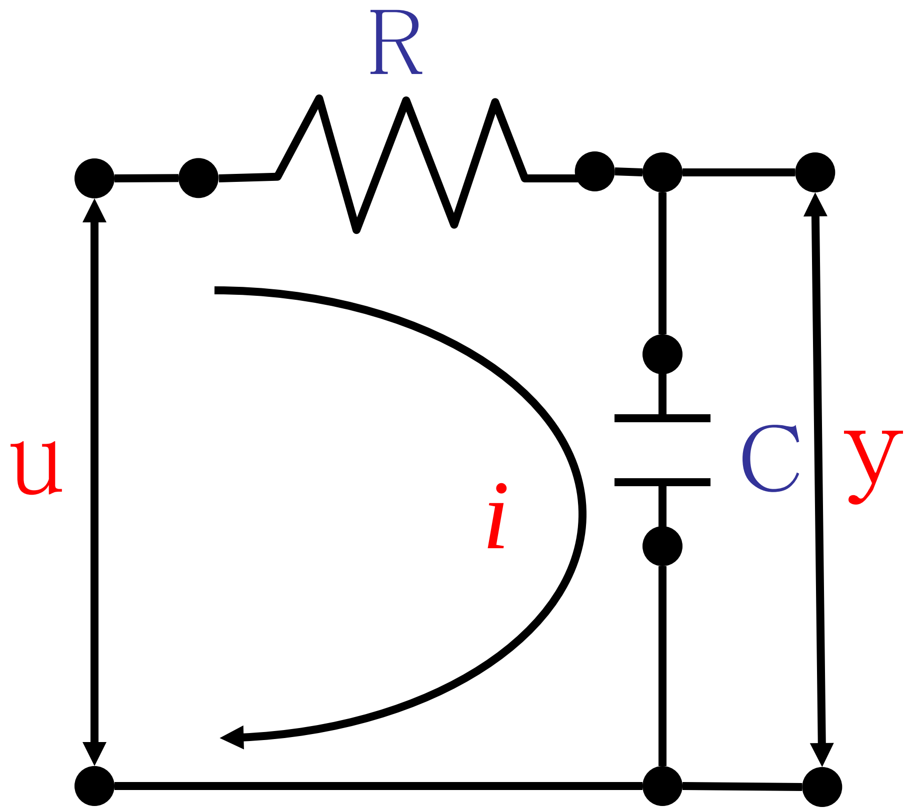
$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u(t), R_1 = 30, R_2 = 10$$



抵抗回路のステップ応答



RC回路(微分方程式表現)



関係式:

$$i(t) = C\dot{y}(t)$$

$$u(t) = Ri(t) + y(t)$$

⇩

$$RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

⇩

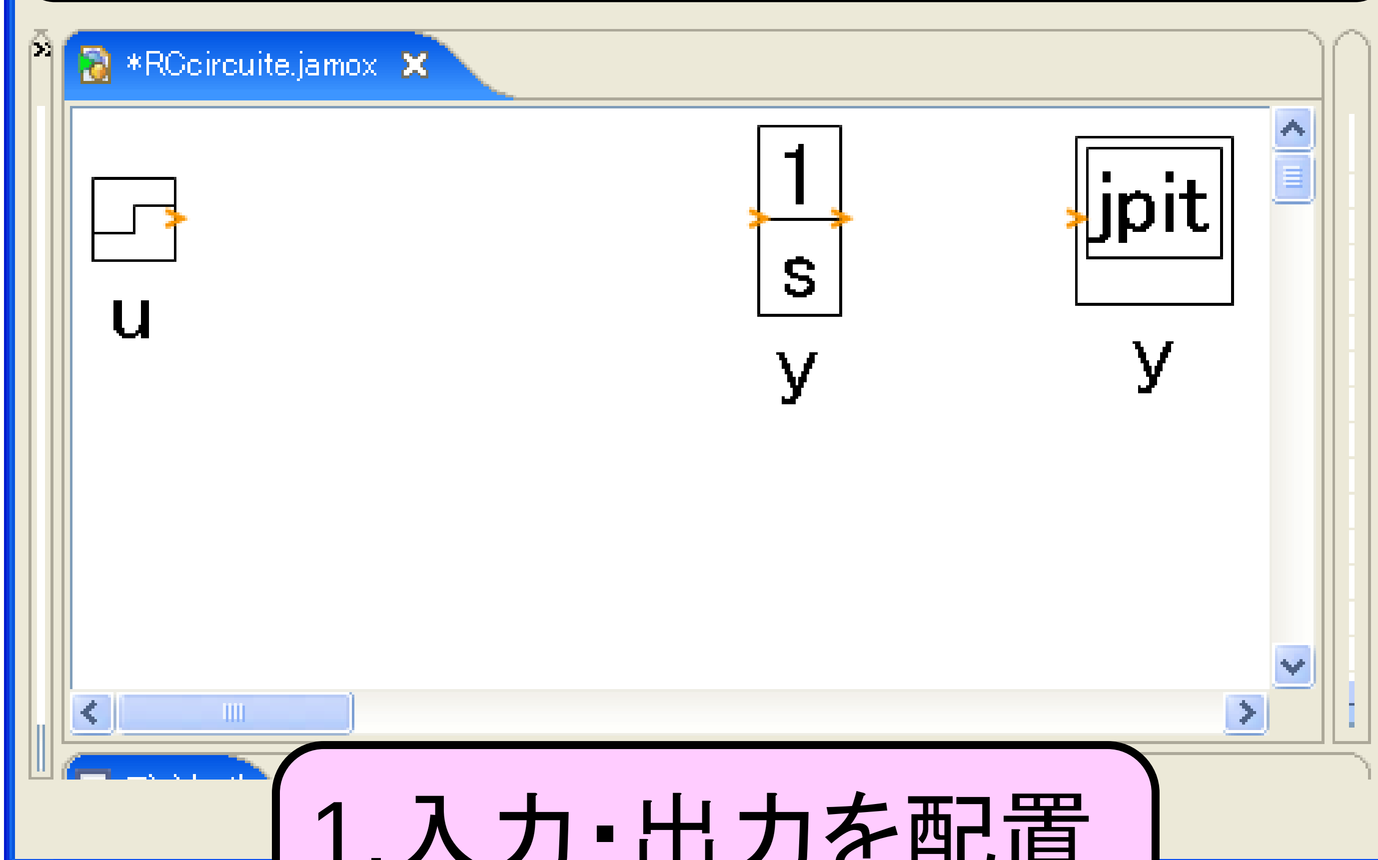
$$\dot{y}(t) = \left(-y(t) + u(t)\right) / RC$$

微分方程式に基づくブロック線図の作成

1. 入力・出力を配置
（変数名を設定）
2. 積分器を配置
（微分・積分に着目。変数名を設定）
3. 定数を配置
（変数名を設定）
4. ブロックを接続
（乗除算を直列結合）
5. ブロックを接続
（加減算を並列・フィードバック結合）
6. ブロックを整理（整列、反転、移動）

RC回路のブロック線図(1/4)

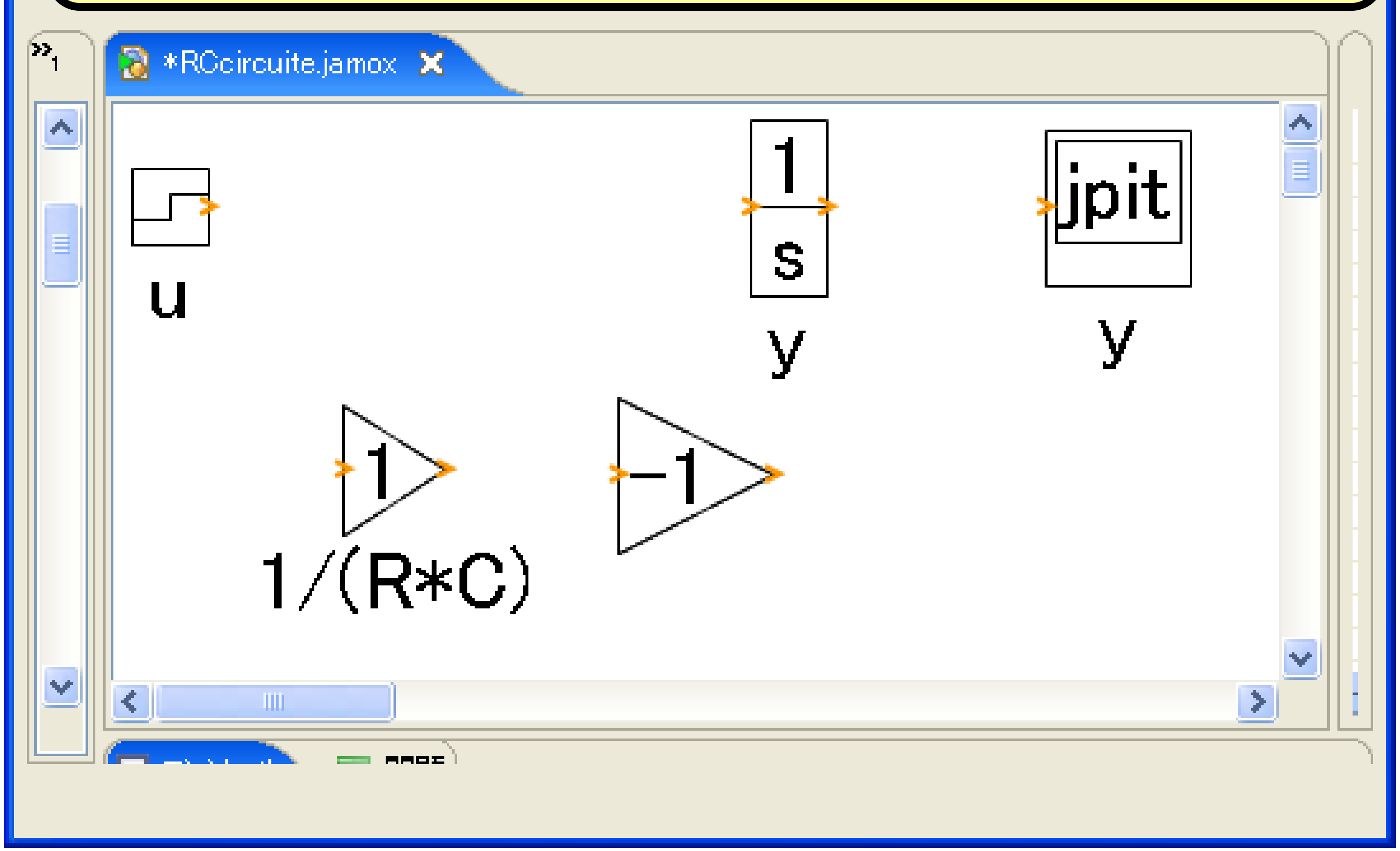
$$\dot{y}(t) = \left(-y(t) + u(t)\right) / RC, RC = 2$$



1.入力・出力を配置
2.積分器を配置

RC回路のブロック線図(2/4)

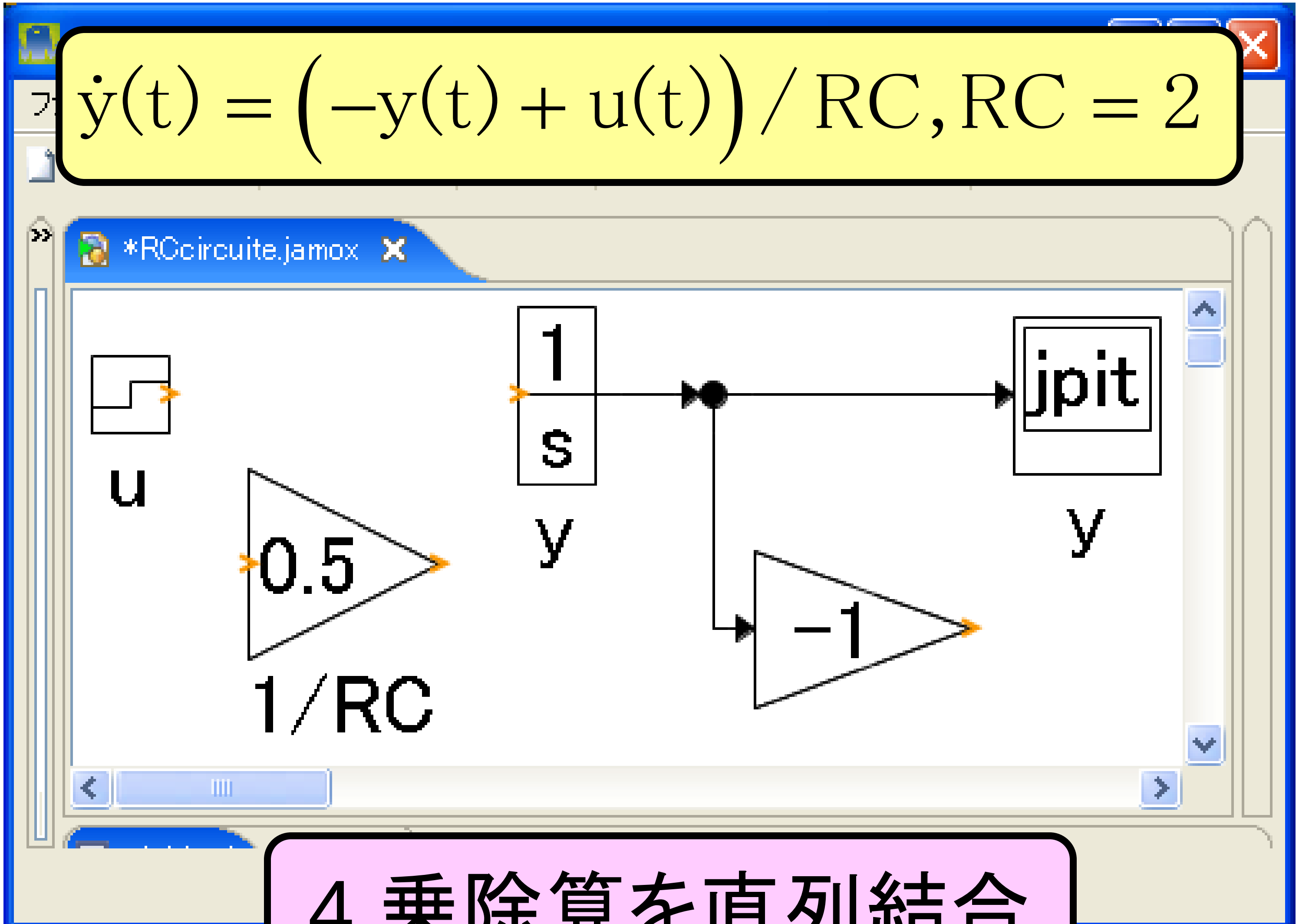
$$\dot{y}(t) = \left(-y(t) + u(t)\right) / RC, RC = 2$$



3.定数を配置

RC回路のブロック線図(3/4)

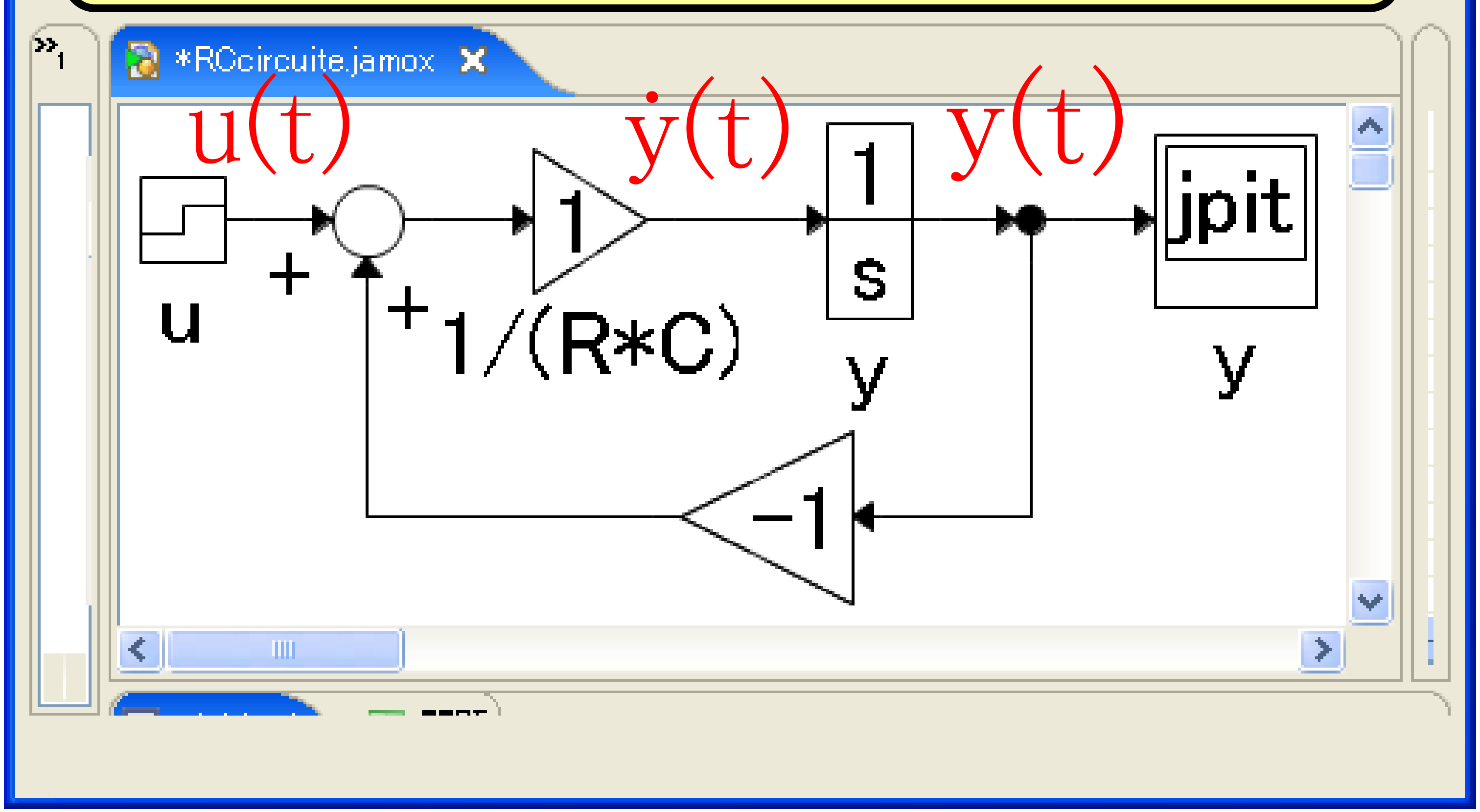
$$\dot{y}(t) = \left(-y(t) + u(t)\right) / RC, RC = 2$$



4.乗除算を直列結合

RC回路のブロック線図(4/4)

$$\dot{y}(t) = \left(-y(t) + u(t)\right) / RC, RC = 2$$

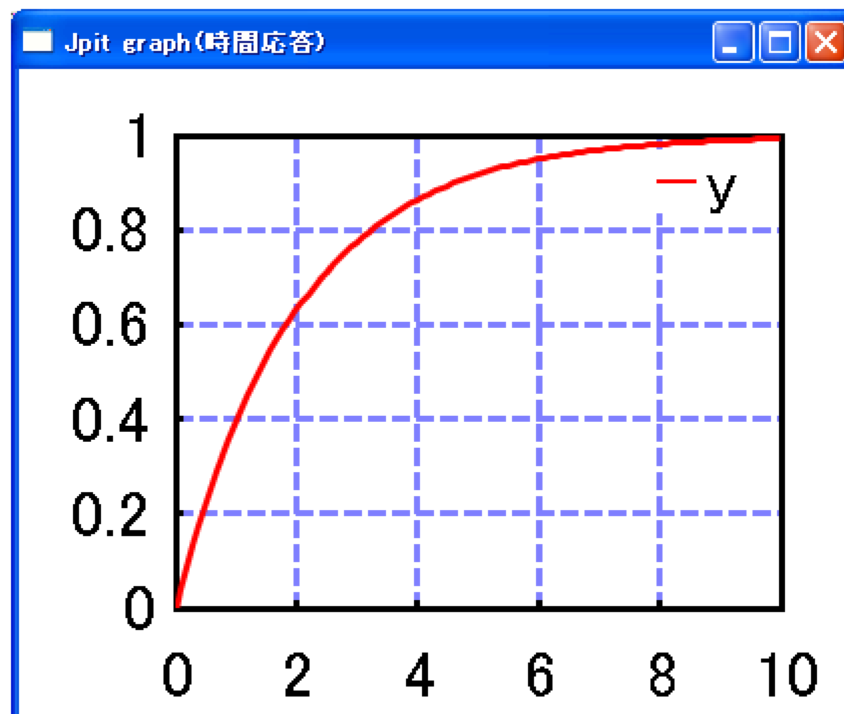


5.加減算を並列・フィードバック結合

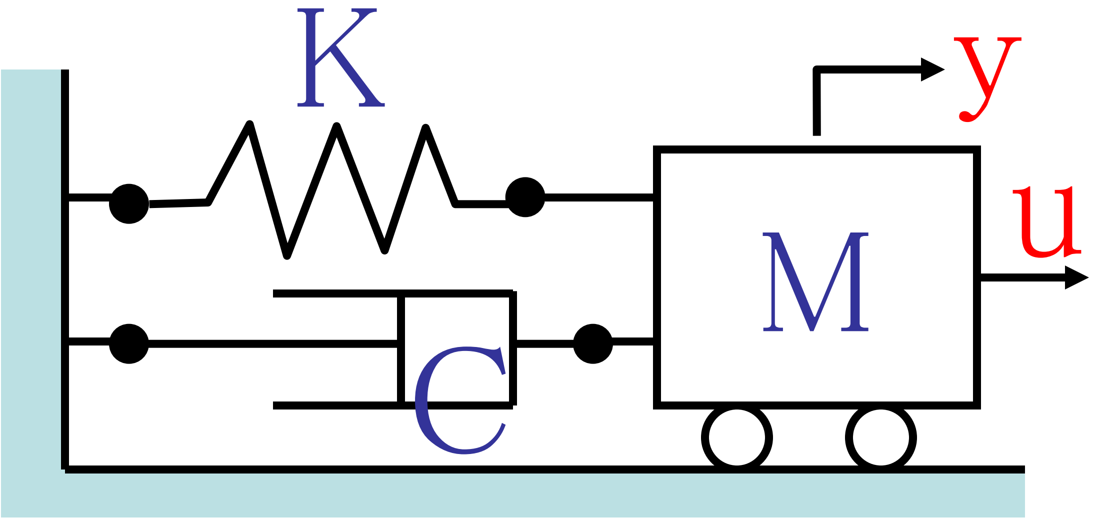
RC回路のステップ応答

初期条件：$y(0) = 0$

積分器のパラメータ設定



質量･ばね･ダンパ系（微分方程式表現）



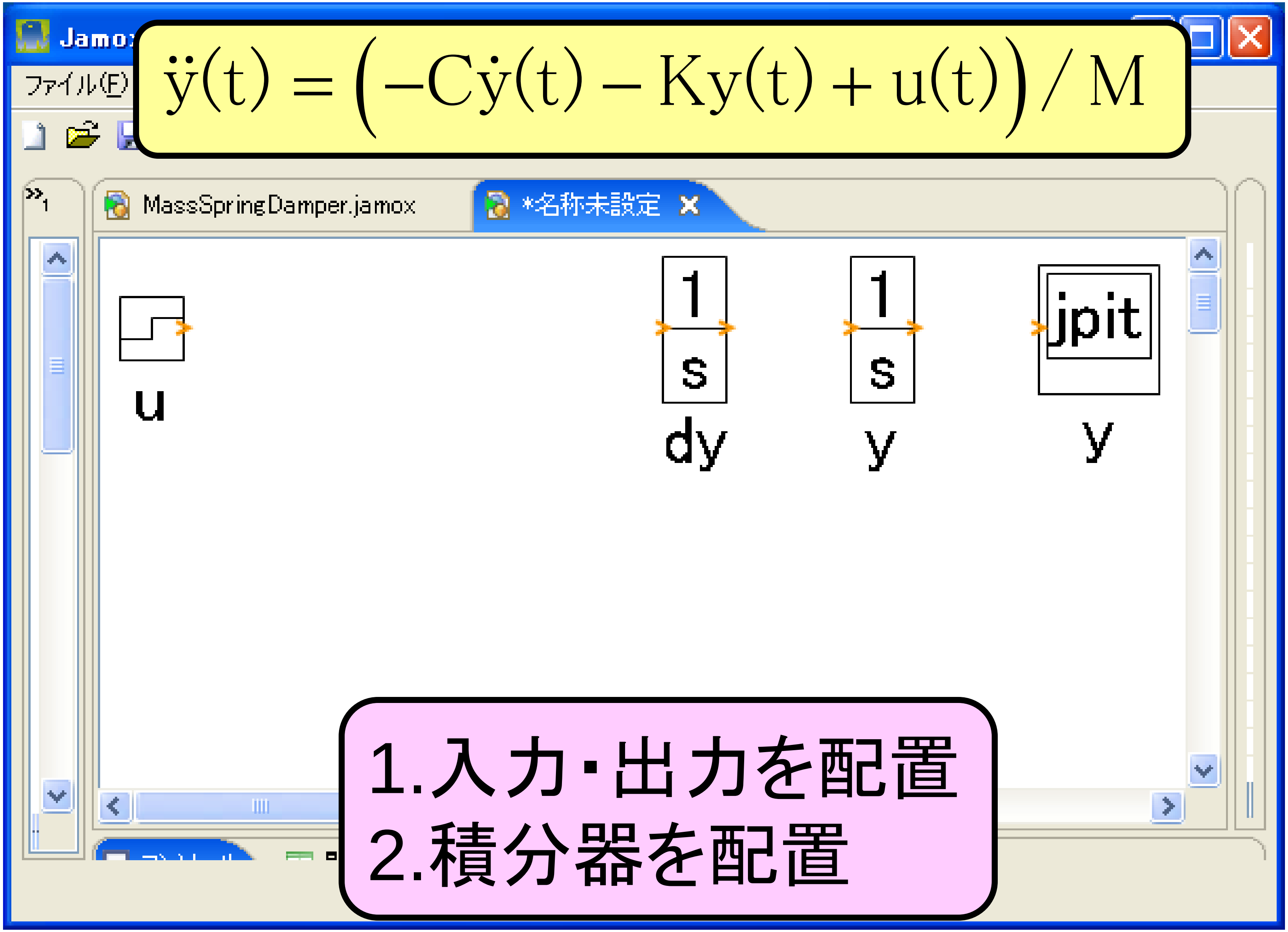
関係式：

$$M\ddot{y}(t) = -C\dot{y}(t) - Ky(t) + u(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \left(-C\dot{y}(t) - Ky(t) + u(t)\right) / M$$

質量・ばね・ダンパ系のブロック線図(1/4)

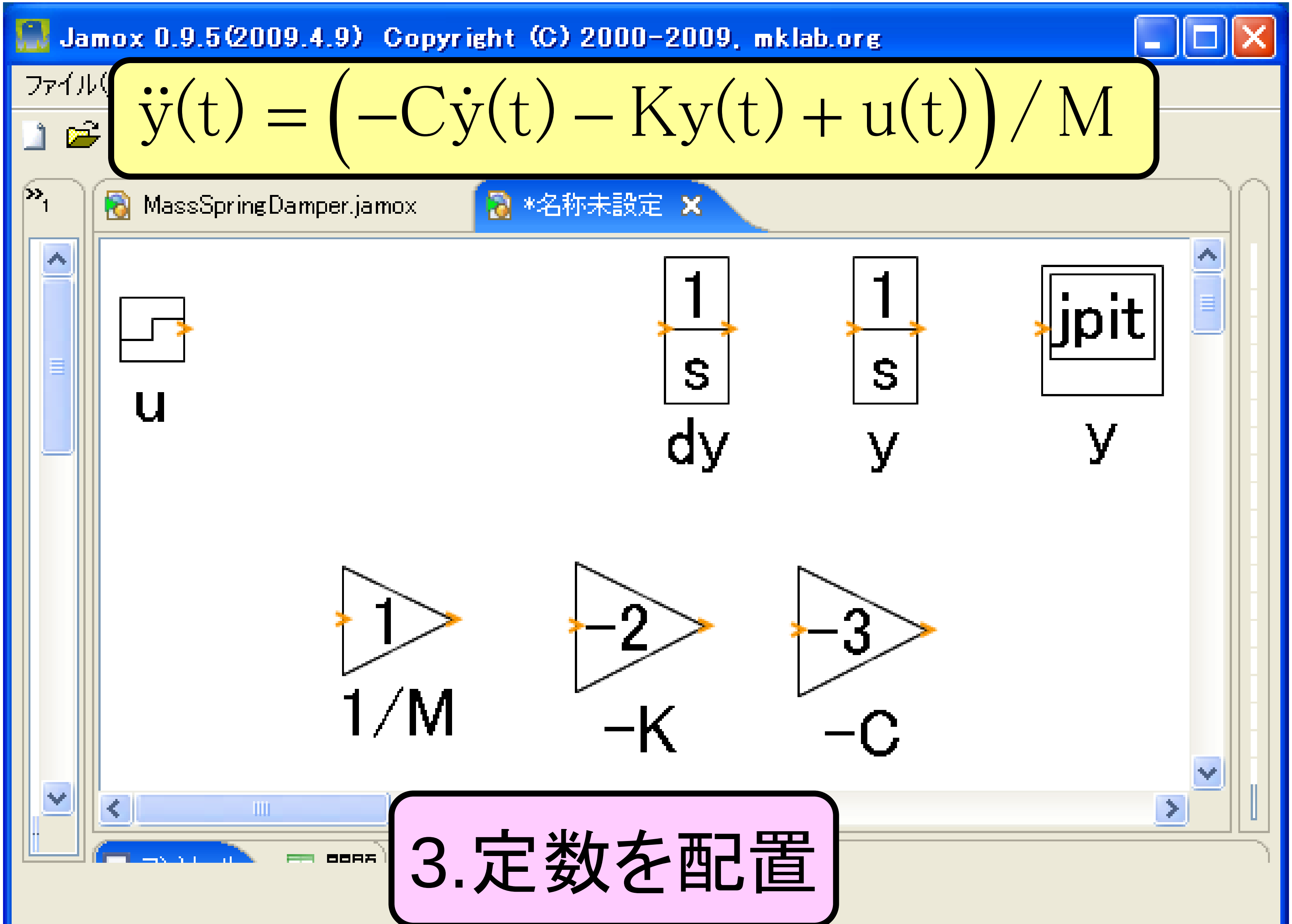
$$\ddot{y}(t) = \left(-C\dot{y}(t) - Ky(t) + u(t)\right) / M$$



1.入力・出力を配置
2.積分器を配置

質量・ばね・ダンパ系のブロック線図(2/4)

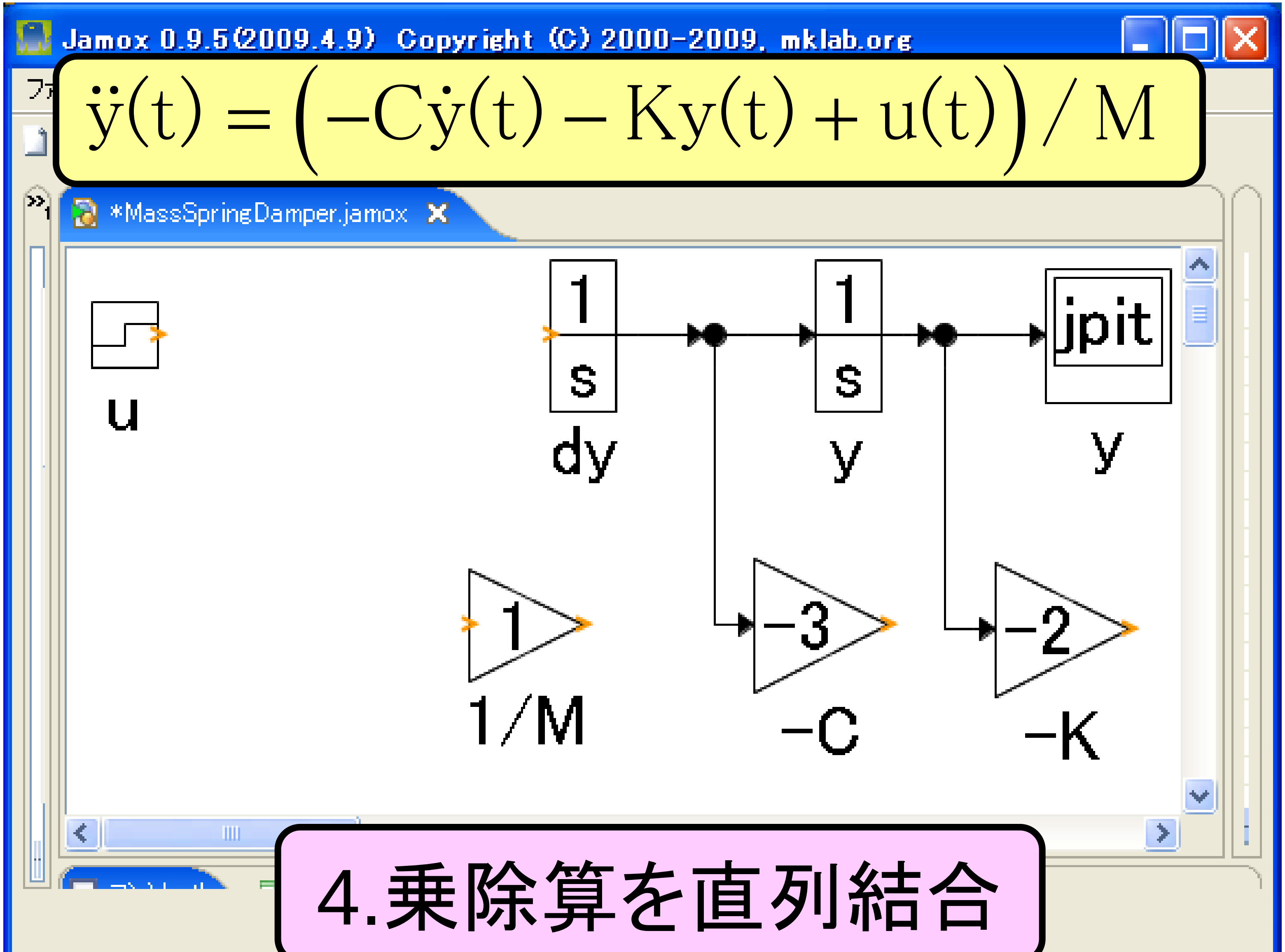
$$\ddot{y}(t) = \left(-C\dot{y}(t) - Ky(t) + u(t)\right) / M$$



3.定数を配置

質量・ばね・ダンパ系のブロック線図(3/4)

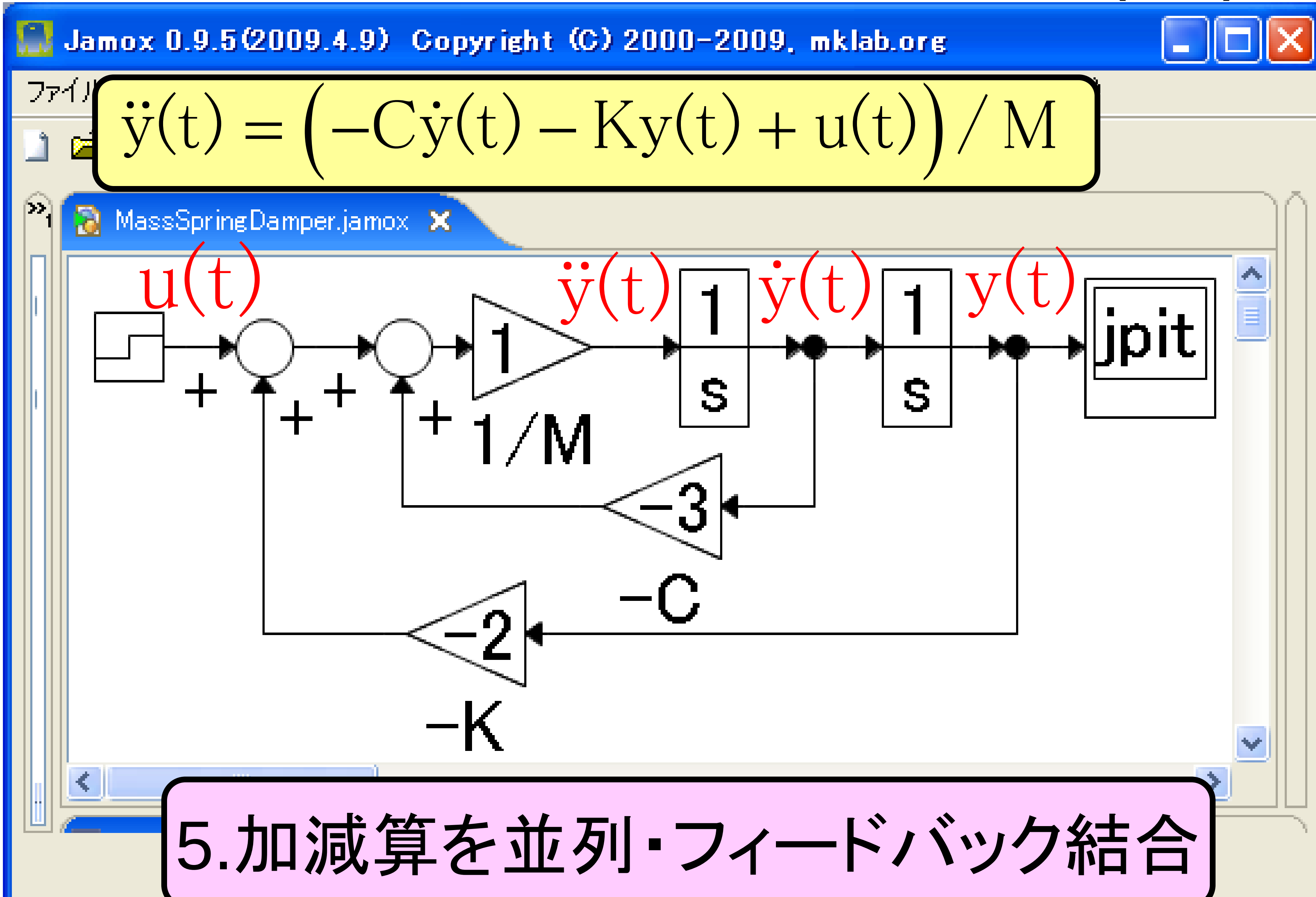
$$\ddot{y}(t) = \Big(-C\dot{y}(t) - Ky(t) + u(t)\Big) / M$$



4.乗除算を直列結合

質量・ばね・ダンパ系のブロック線図(4/4)

$$\ddot{y}(t) = \left(-C\dot{y}(t) - Ky(t) + u(t)\right) / M$$

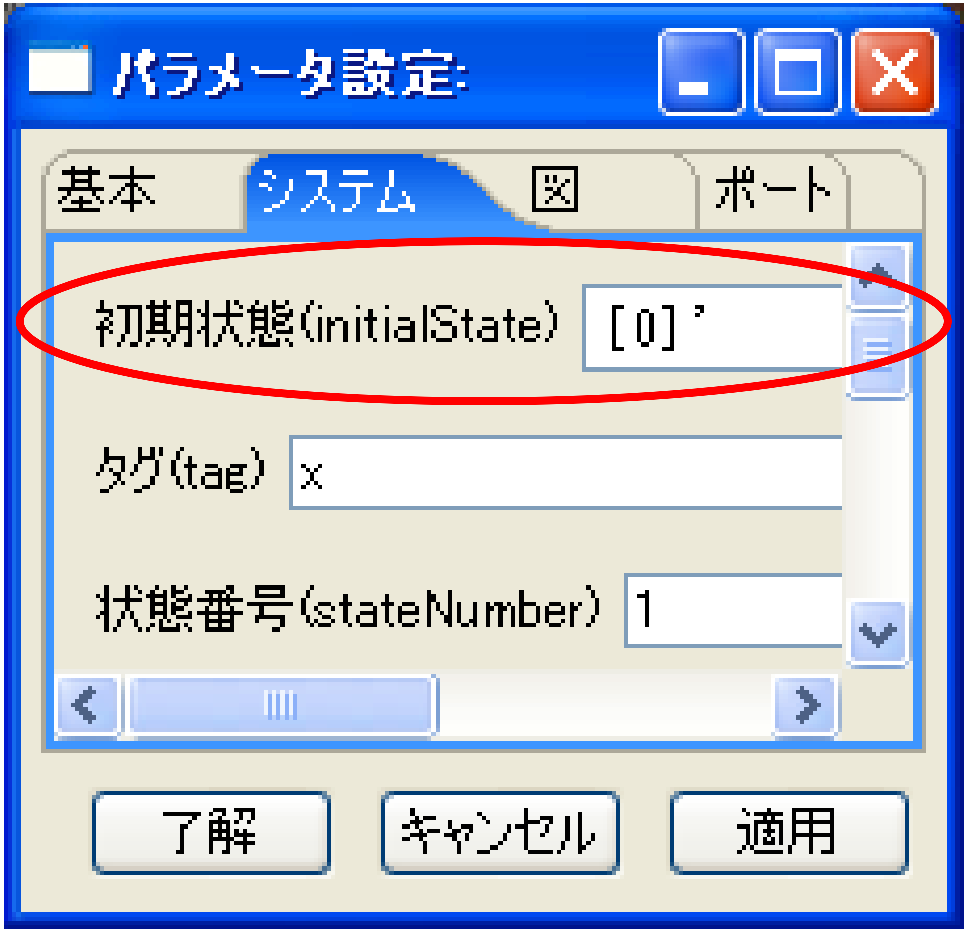


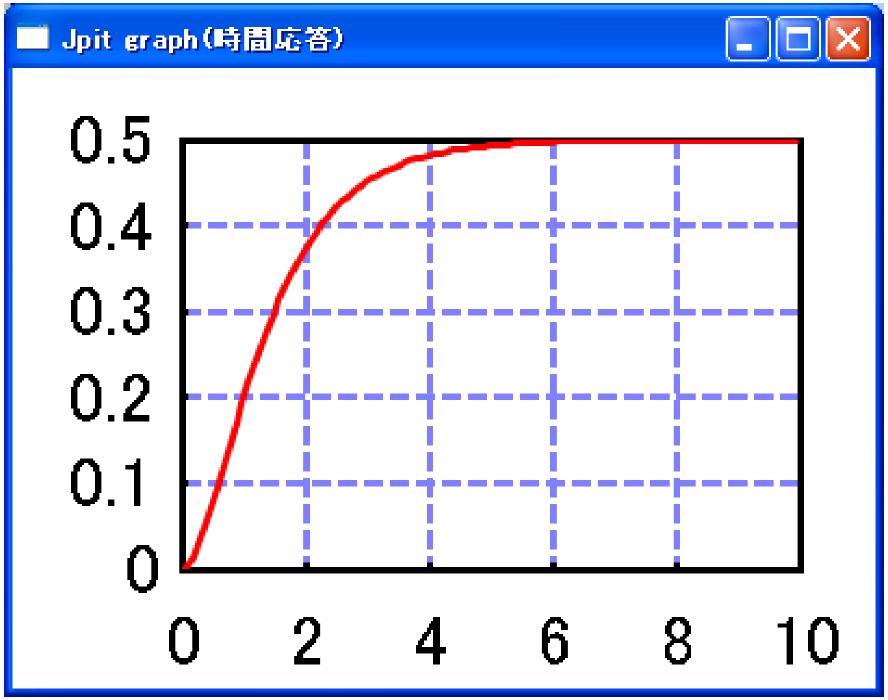
5.加減算を並列・フィードバック結合

質量･ばね･ダンパ系のステップ応答

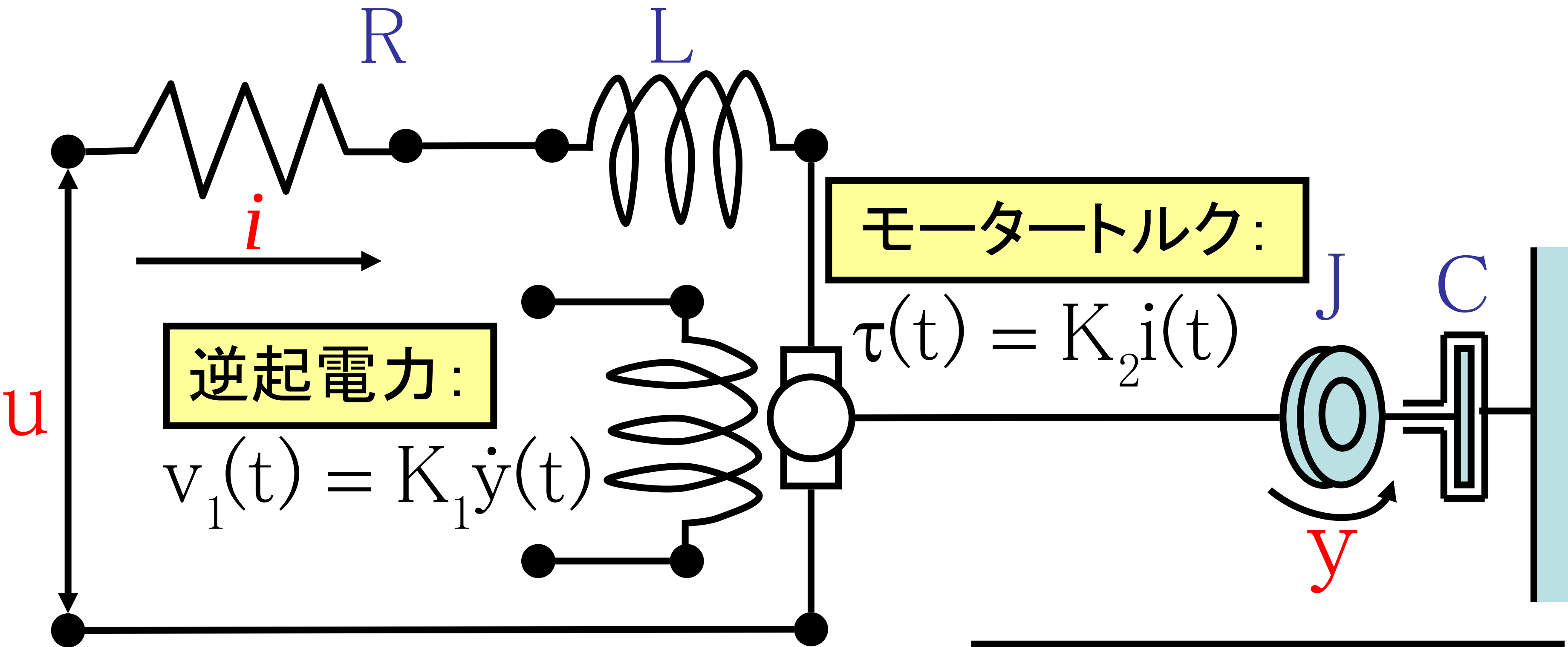
初期条件：$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$

積分器のパラメータ設定





DCサーボモータ



逆起電力：

$$v_1(t) = K_1\dot{y}(t)$$

モータートルク：

$$\tau(t) = K_2 i(t)$$

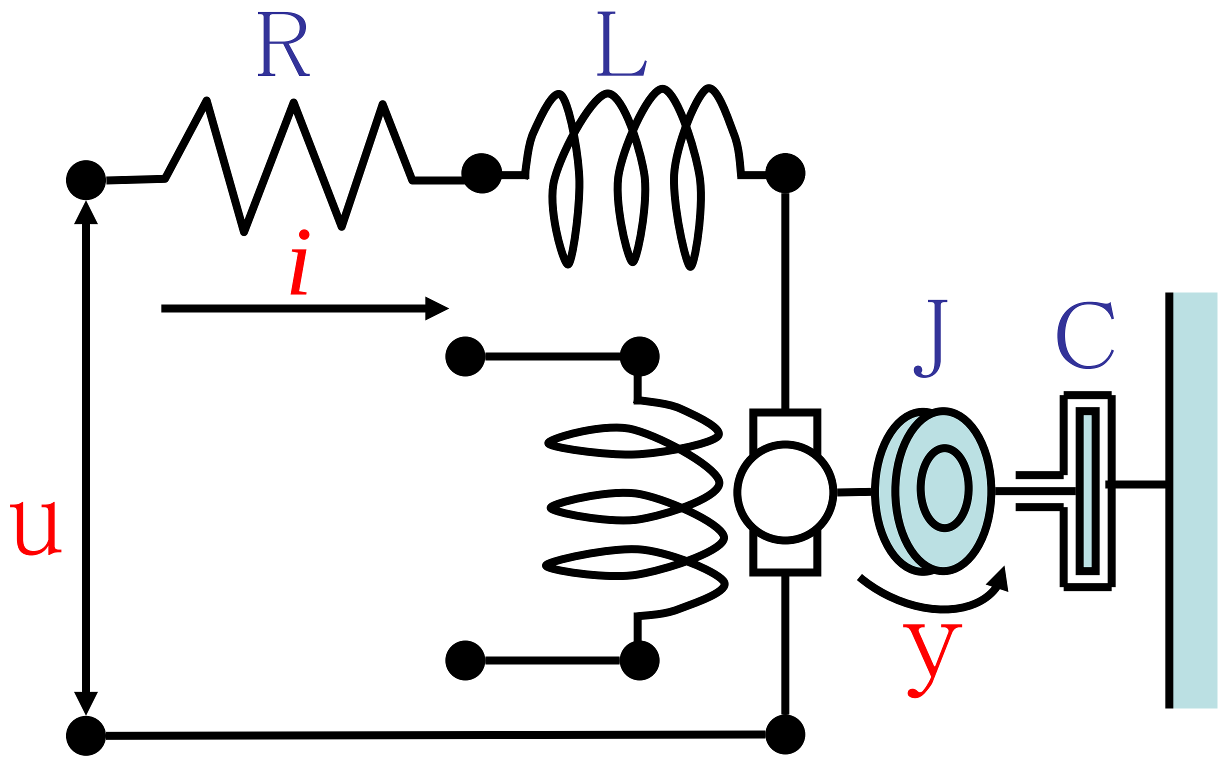
電気回路の関係式：

$$u(t) = Ri(t) + L\dot{i}(t) + v_1(t)$$

回転運動の関係式：

$$J\ddot{y}(t) = \tau(t) - C\dot{y}(t)$$

DCサーボモータの微分方程式表現



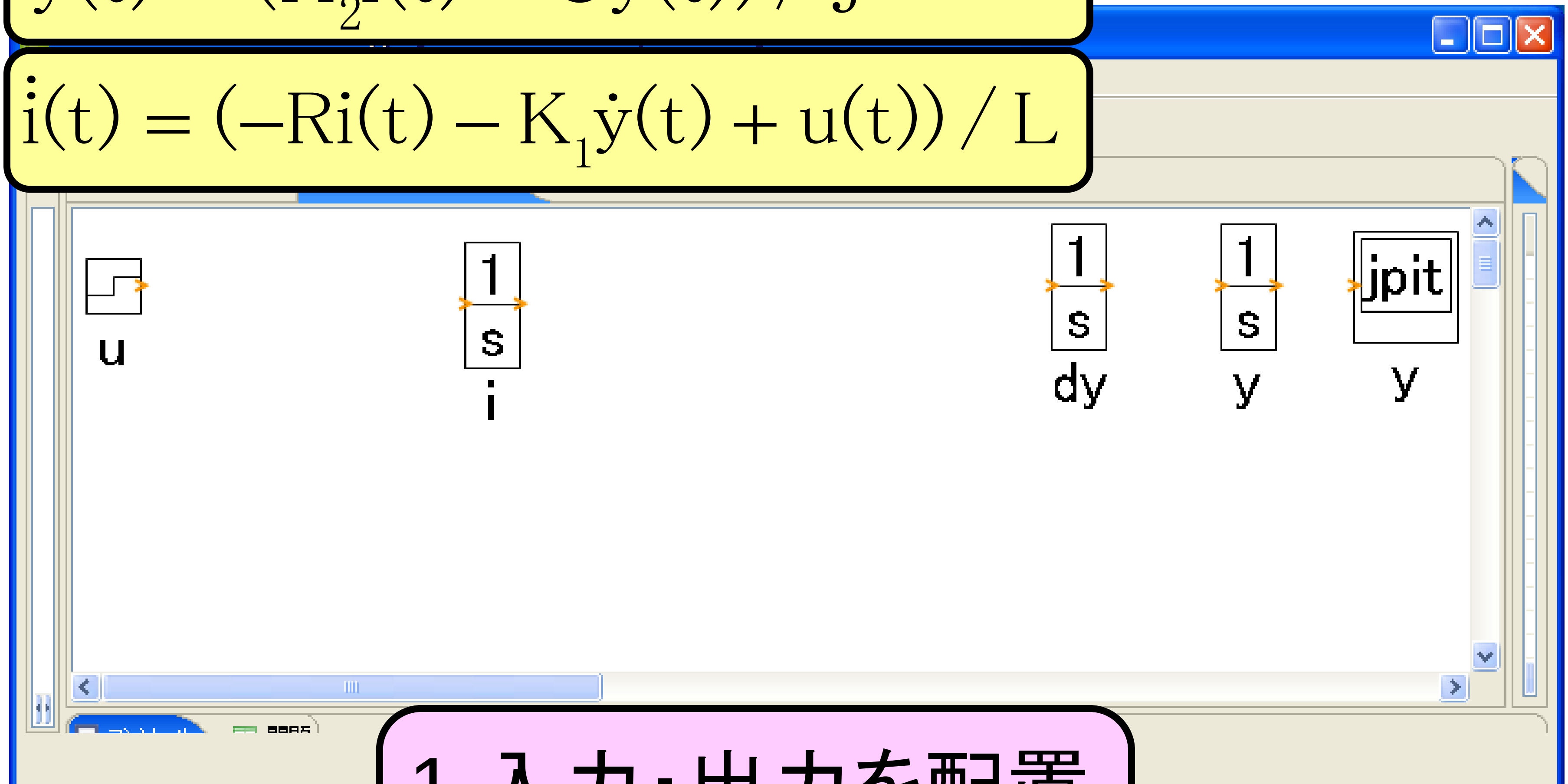
$$\ddot{y}(t) = \Big(K_2 i(t) - C\dot{y}(t)\Big) / J$$

$$\dot{i}(t) = \Big(-Ri(t) - K_1\dot{y}(t) + u(t)\Big) / L$$

DCサーボモータのブロック線図(1/4)

$$\ddot{y}(t) = (K_2 i(t) - C\dot{y}(t)) / J$$

$$\dot{i}(t) = (-Ri(t) - K_1\dot{y}(t) + u(t)) / L$$

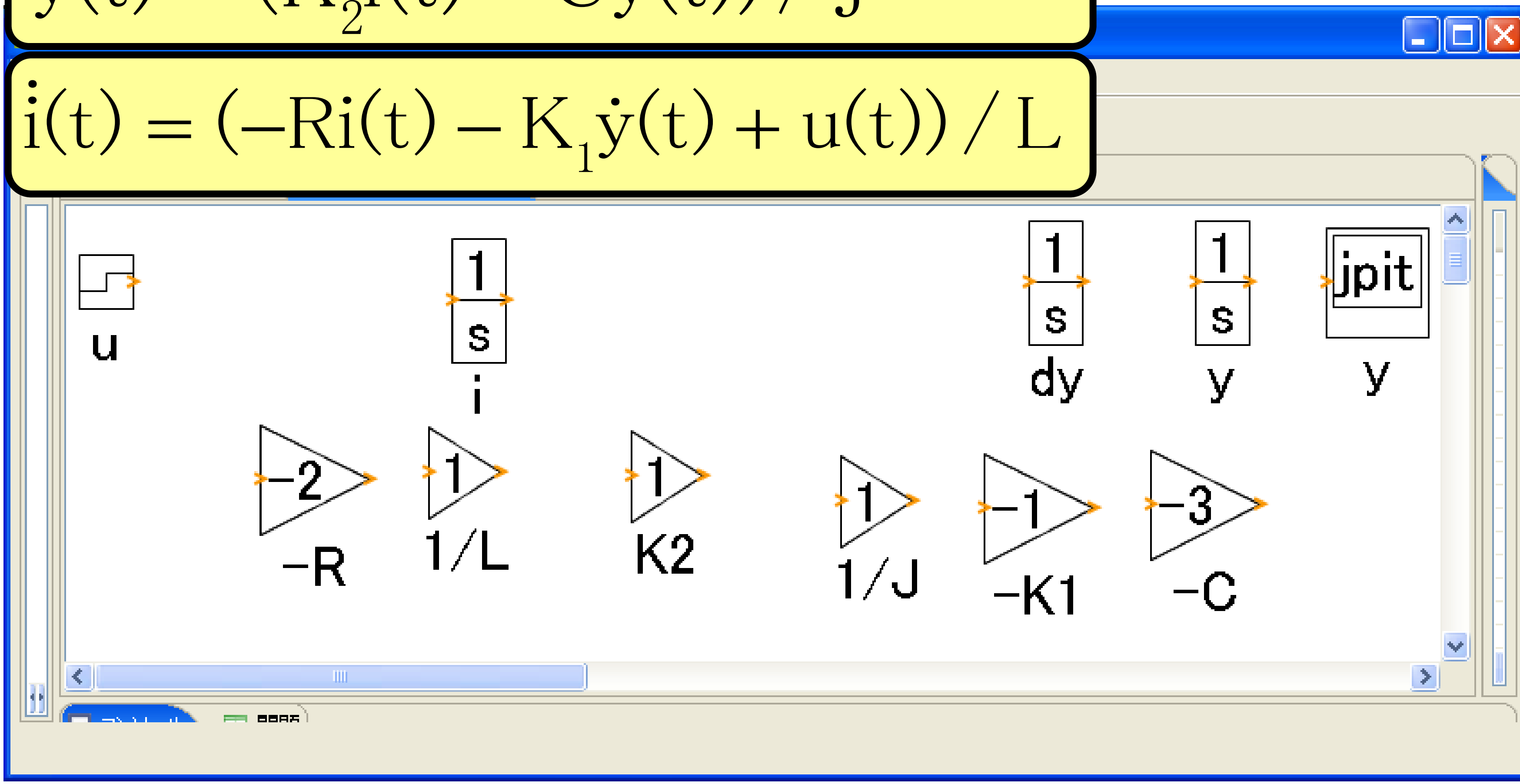


1.入力・出力を配置
2.積分器を配置

DCサーボモータのブロック線図(2/4)

$$\ddot{y}(t) = (K_2 i(t) - C\dot{y}(t)) / J$$

$$\dot{i}(t) = (-Ri(t) - K_1\dot{y}(t) + u(t)) / L$$

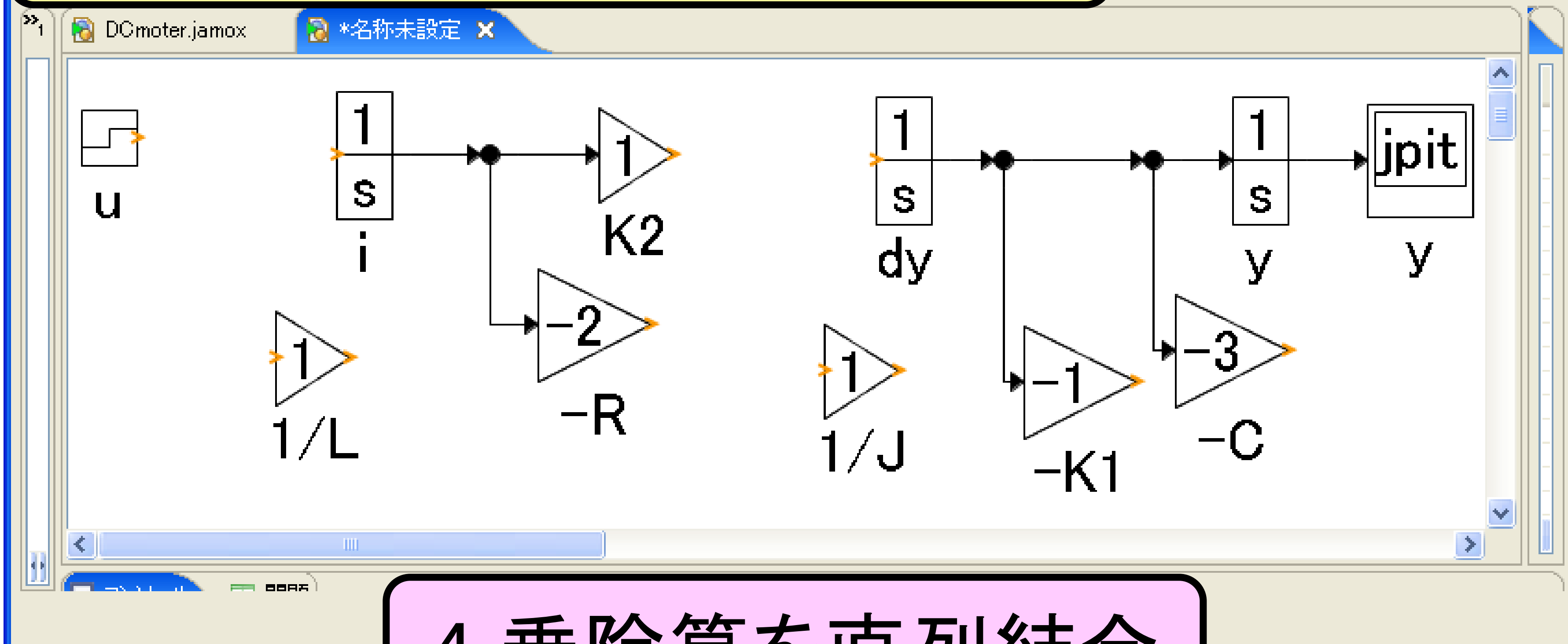


3.定数を配置

DCサーボモータのブロック線図(3/4)

$$\ddot{y}(t) = (K_2 i(t) - C\dot{y}(t)) / J$$

$$\dot{i}(t) = (-Ri(t) - K_1\dot{y}(t) + u(t)) / L$$

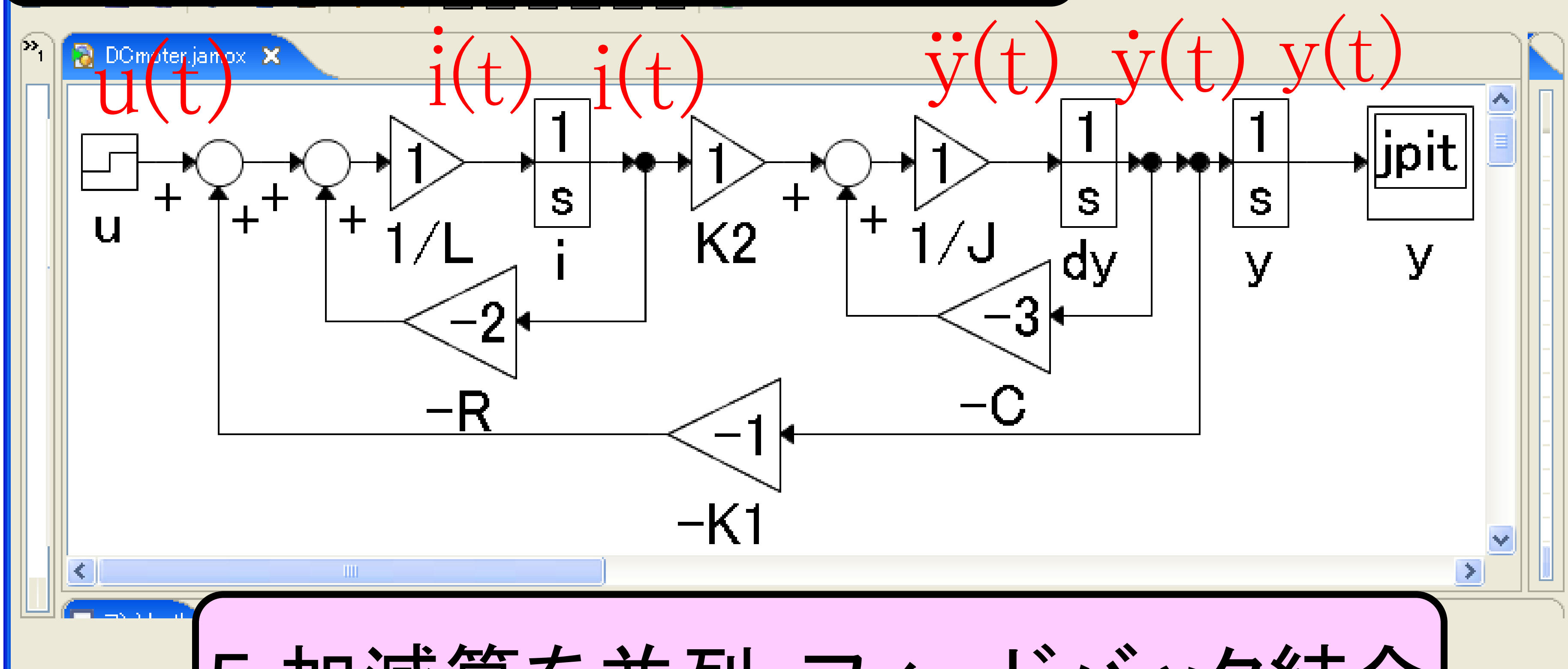


4.乗除算を直列結合

DCサーボモータのブロック線図(4/4)

$$\ddot{y}(t) = (K_2 i(t) - C\dot{y}(t)) / J$$

$$\dot{i}(t) = (-Ri(t) - K_1\dot{y}(t) + u(t)) / L$$

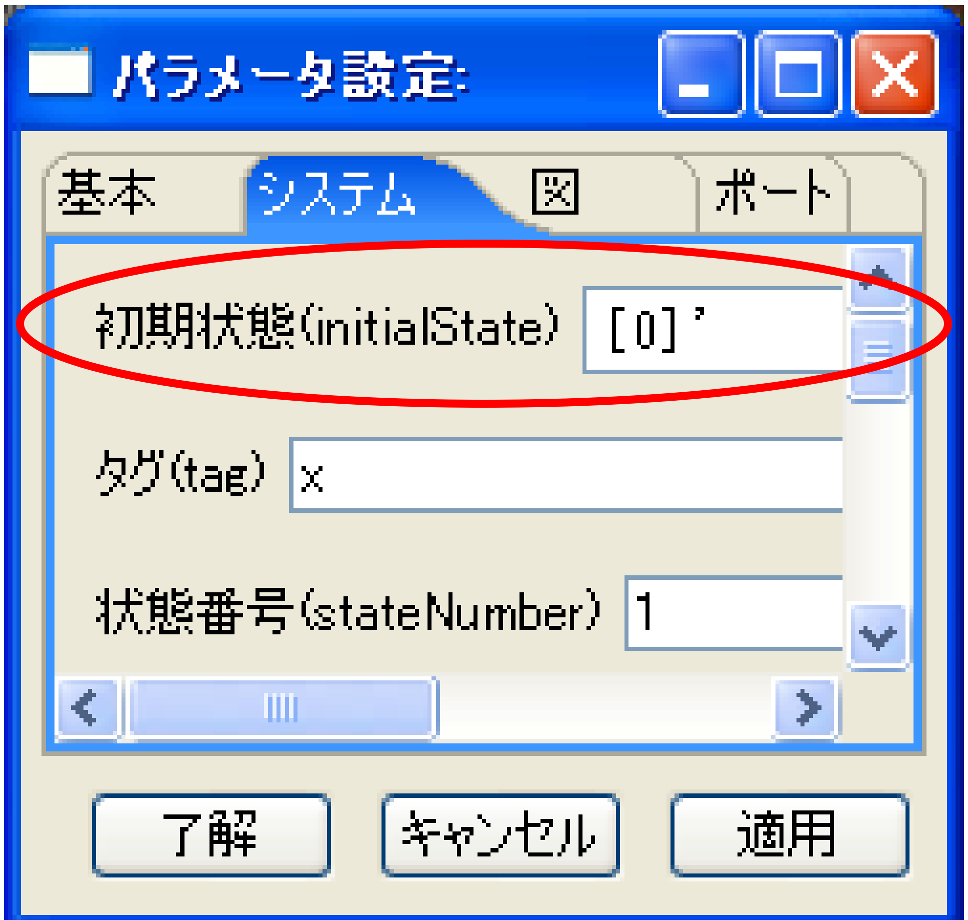


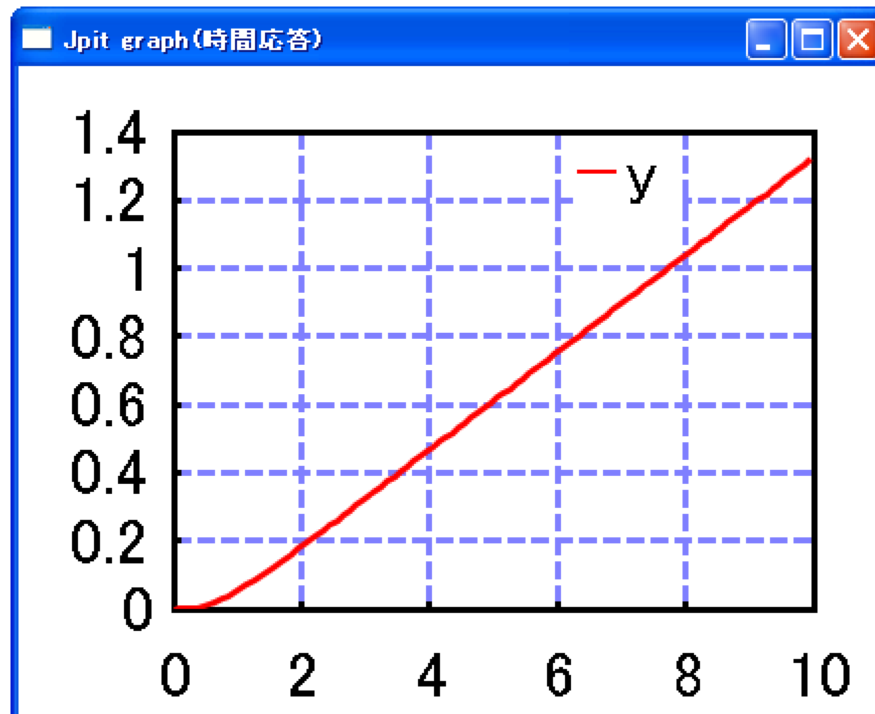
5.加減算を並列・フィードバック結合

DCサーボモータのステップ応答

初期条件：$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, i(0) = 0$

積分器のパラメータ設定





ラプラス変換

ラプラス変換：

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

時間微分のラプラス変換：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) \quad \left(f(0) = \dot{f}(0) = \cdots f^{(n-1)} = 0 \text{ のとき}\right)$$

時間積分のラプラス変換：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

ラプラス変換表（1）

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u_s(t)(= 1)$	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$

ラプラス変換表（2）

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

伝達関数

$$\boxed{\text{伝達関数} := \frac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}}$$

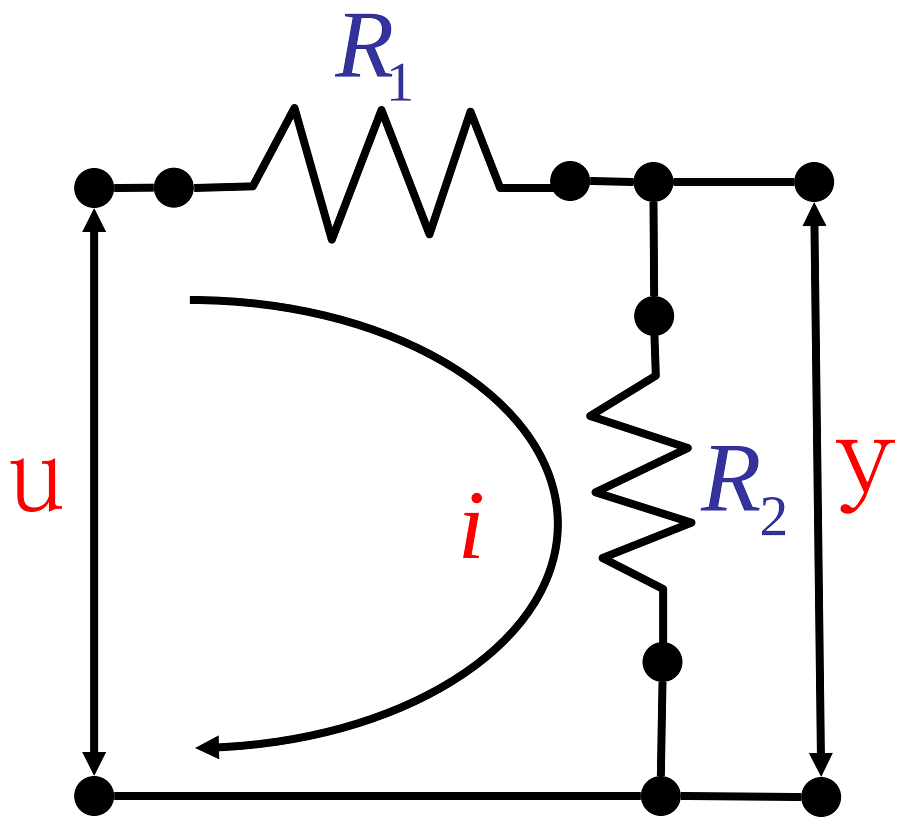
「すべての初期値を0とする」

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad (\text{入力}: u(t), \text{出力}: y(t))$$

⇩

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

抵抗回路の伝達関数



関係式:

$$u(t) = i(t) \times (R_1 + R_2)$$
$$y(t) = i(t) \times R_2$$

⇩ ラプラス変換

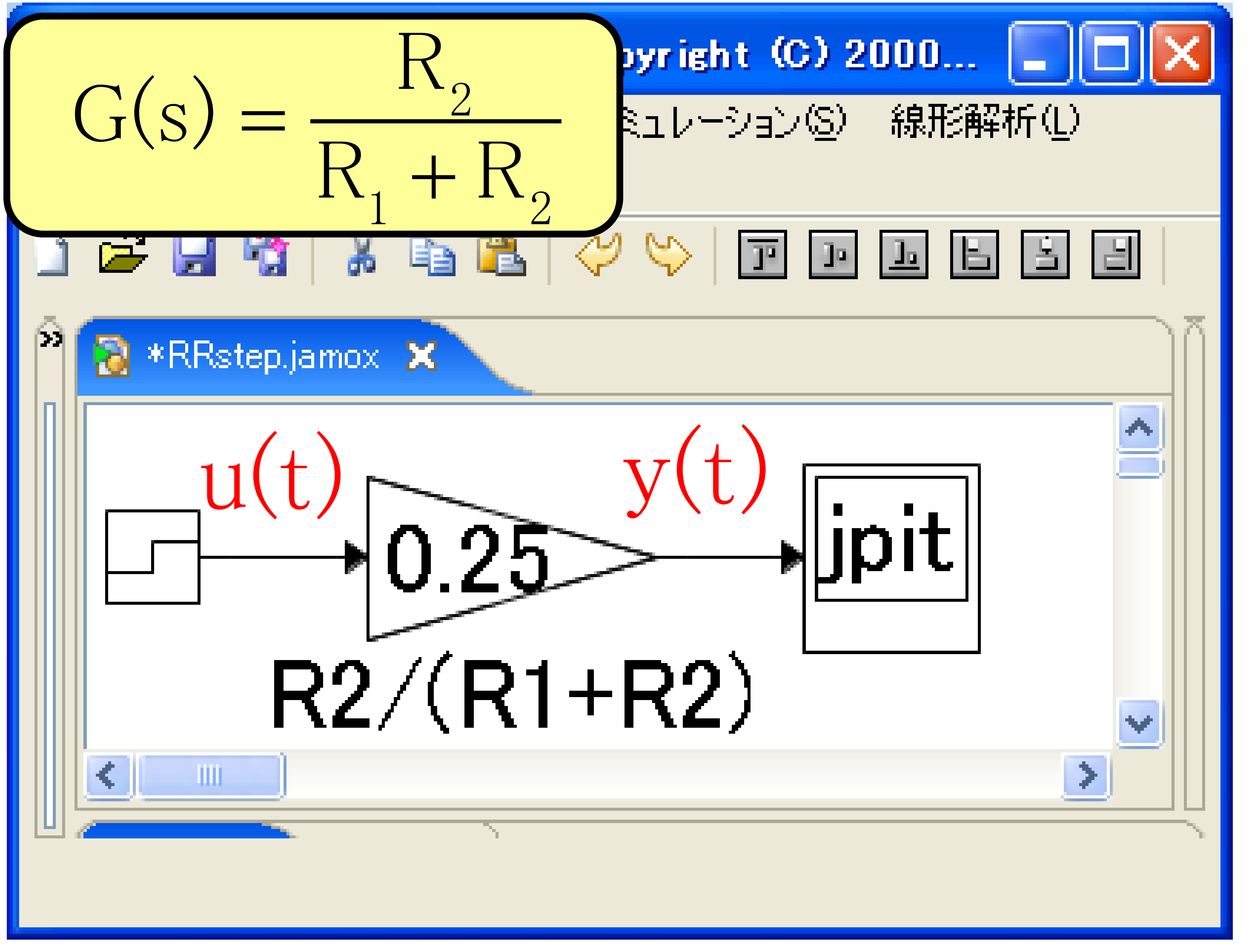
$$Y(s) = I(s) \times (R_1 + R_2)$$
$$Y(s) = I(s) \times R_2$$

⇩

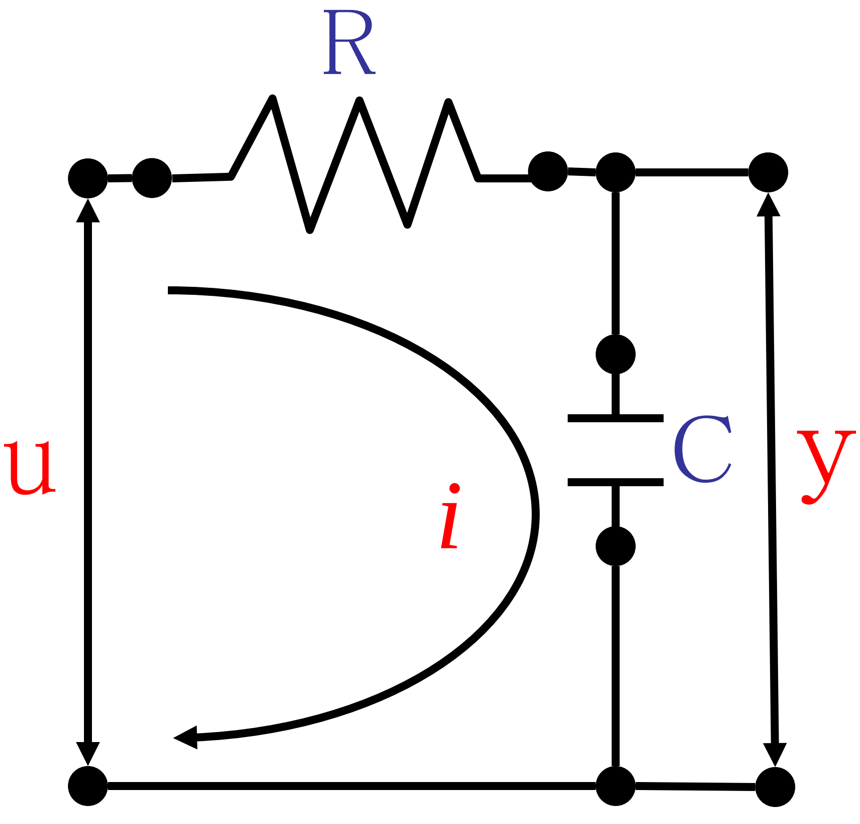
$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

抵抗回路のブロック線図

$$G(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



RC回路の伝達関数



関係式:

$$i(t) = C\dot{y}(t)$$
$$u(t) = Ri(t) + y(t)$$

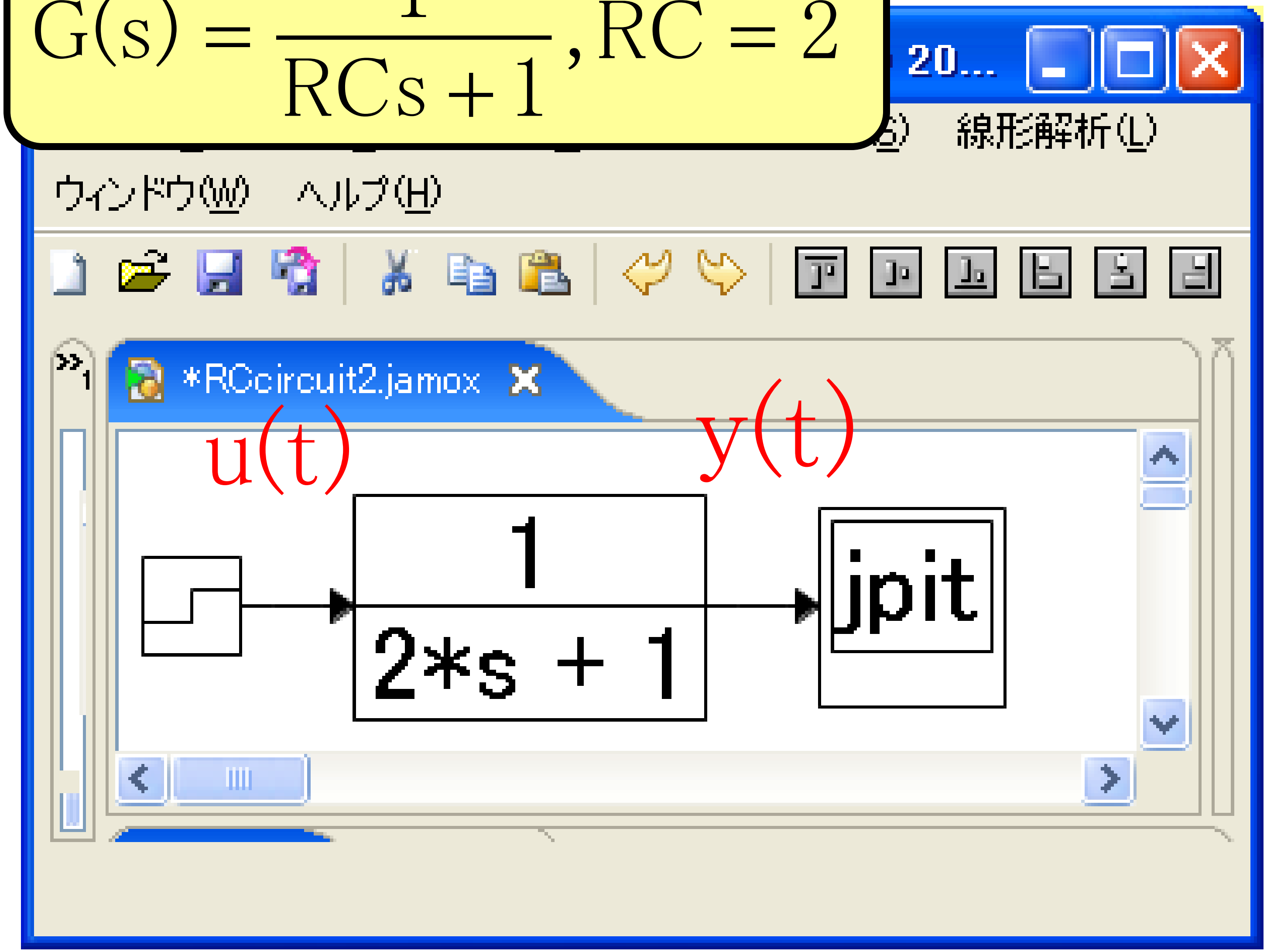
ラプラス変換

$$I(s) = CsY(s)$$
$$U(s) = RI(s) + Y(s)$$

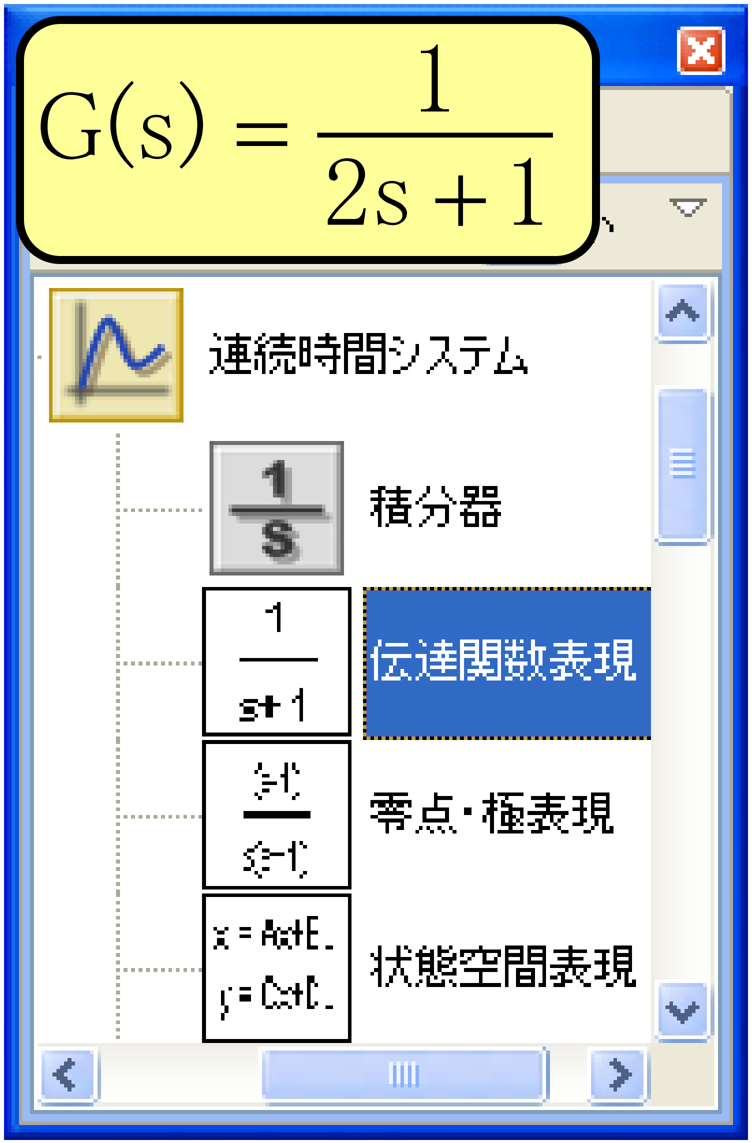
$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

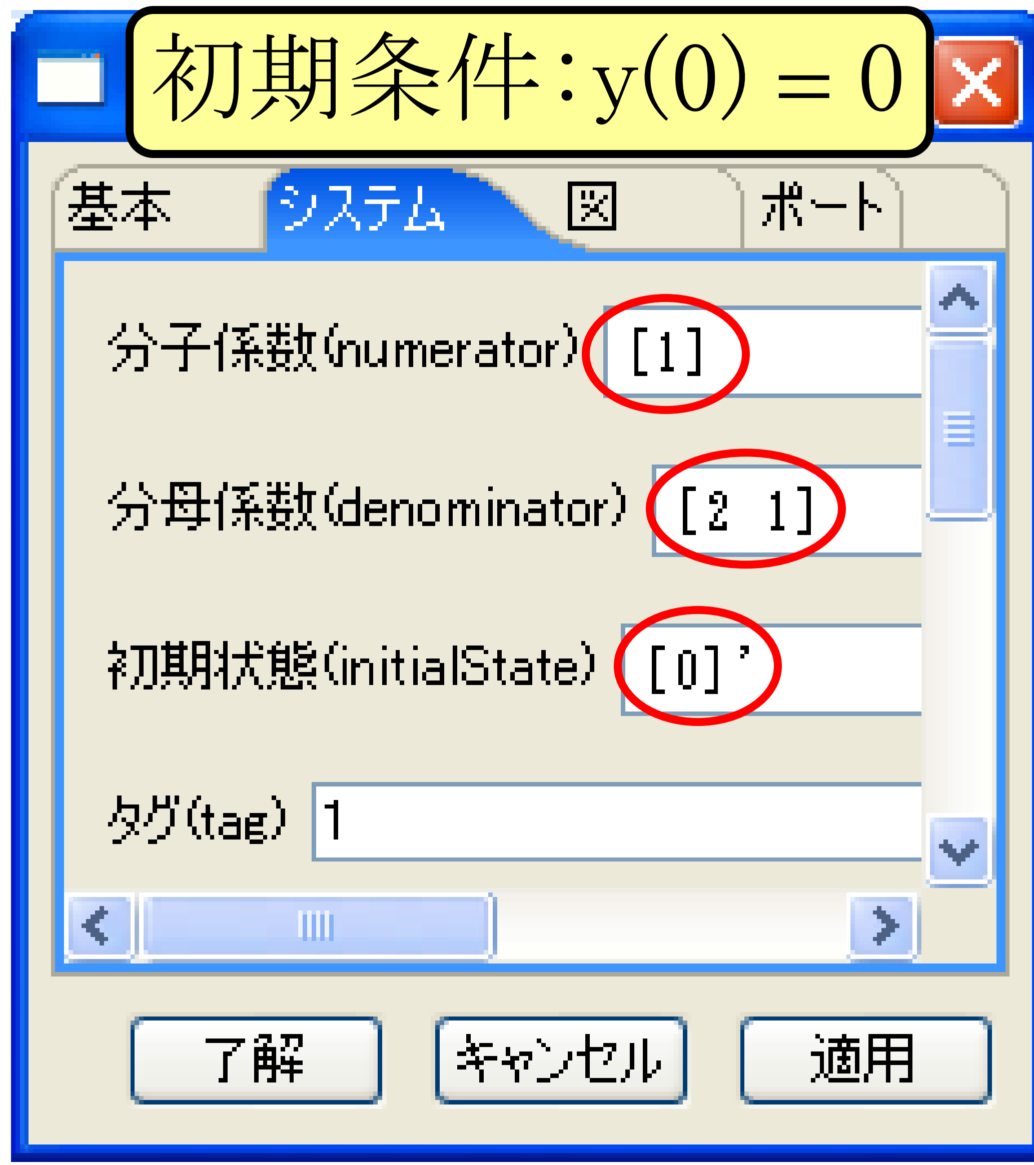
RC回路のブロック線図

$$G(s)=\frac{1}{RCs+1}, RC=2$$



伝達関数ブロックのパラメータ設定





質量･ばね･ダンパ系の伝達関数

関係式:

$$M\ddot{y}(t) = -C\dot{y}(t) - Ky(t) + u(t)$$

ラプラス変換

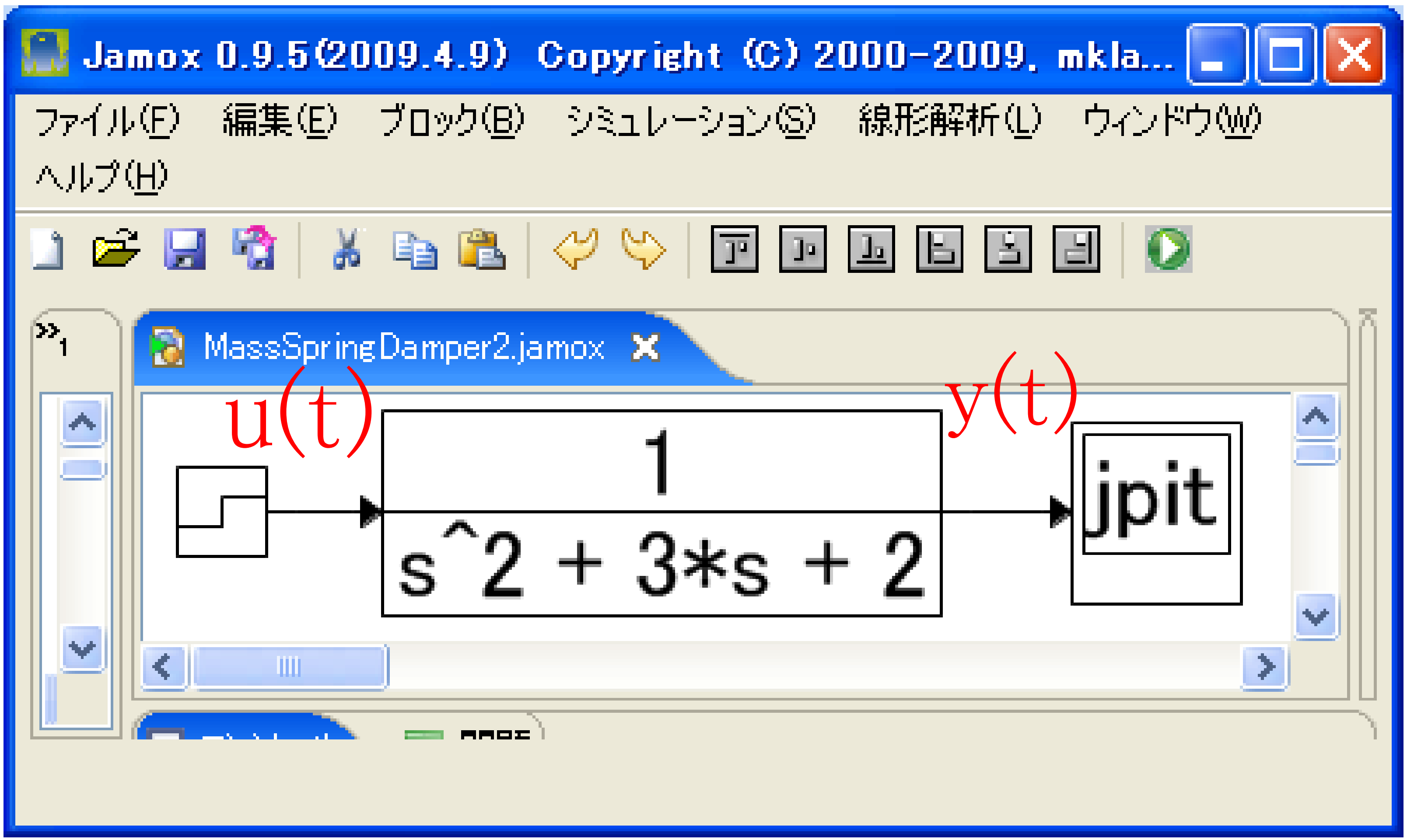
$$Ms^2Y(s) = -CsY(s) - KY(s) + U(s)$$

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

質量・ばね・ダンパ系のブロック線図

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

$$M = 1, K = 2, C = 3$$



伝達関数ブロックのパラメータ設定

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

$$M = 1, K = 2, C = 3$$

初期条件:

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$$

積分器の数だけ設定

(=分母多項式の次数)

DCサーボモータの伝達関数

$$u(t) = Ri(t) + L\dot{i}(t) + v_1(t),\ v_1(t) = K_1\dot{y}(t)$$

$$J\ddot{y}(t) = \tau(t) - C\dot{y}(t),\ \tau(t) = K_2 i(t)$$

$\Downarrow$ ラプラス変換

$$U(s) = RI(s) + LsI(s) + V_1(s),\ V_1(s) = K_1 sY(s)$$

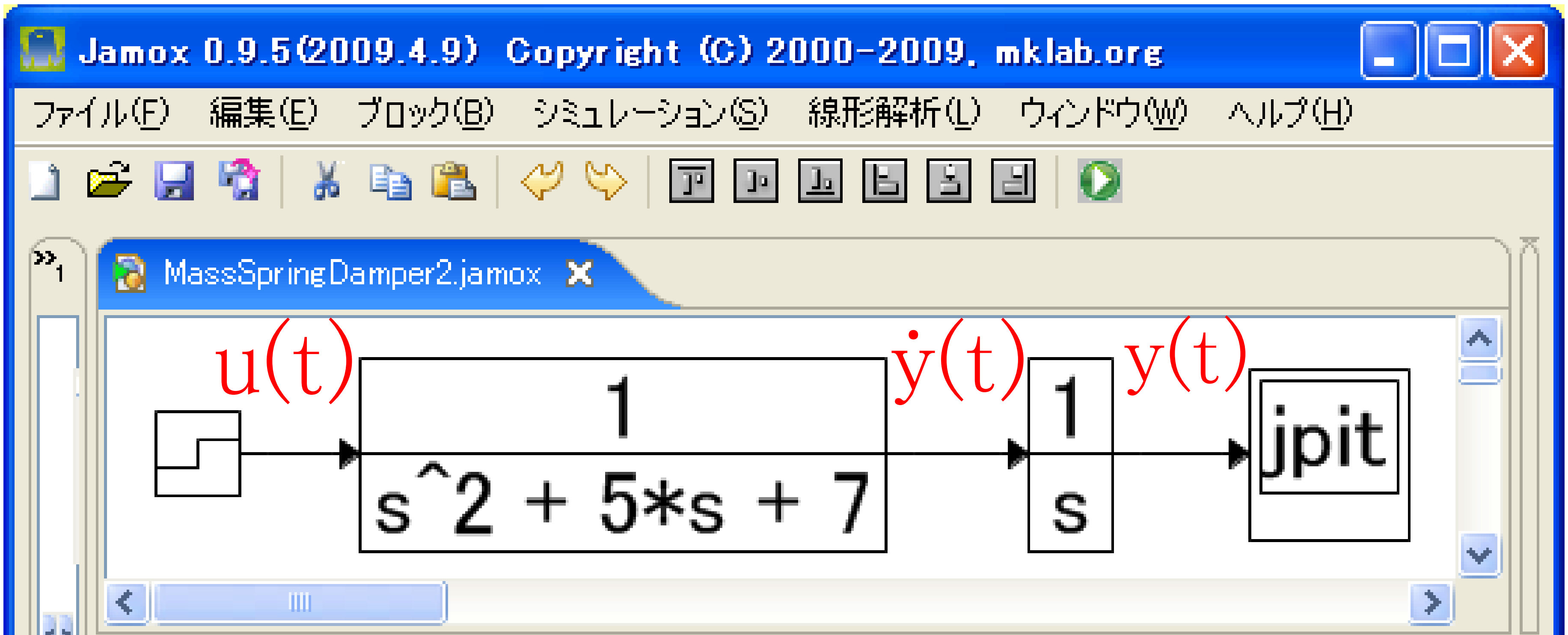
$$Js^2Y(s) = T(s) - CsY(s),\ T(s) = K_2 I(s)$$

$\Downarrow$

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_2}{(JLs^2 + (JR + LC)s + RC + K_1K_2)s}$$

DCサーボモータのブロック線図

$$G(s) = \frac{K_2}{(JLs^2 + (JR + LC)s + (RC + K_1K_2))s}$$

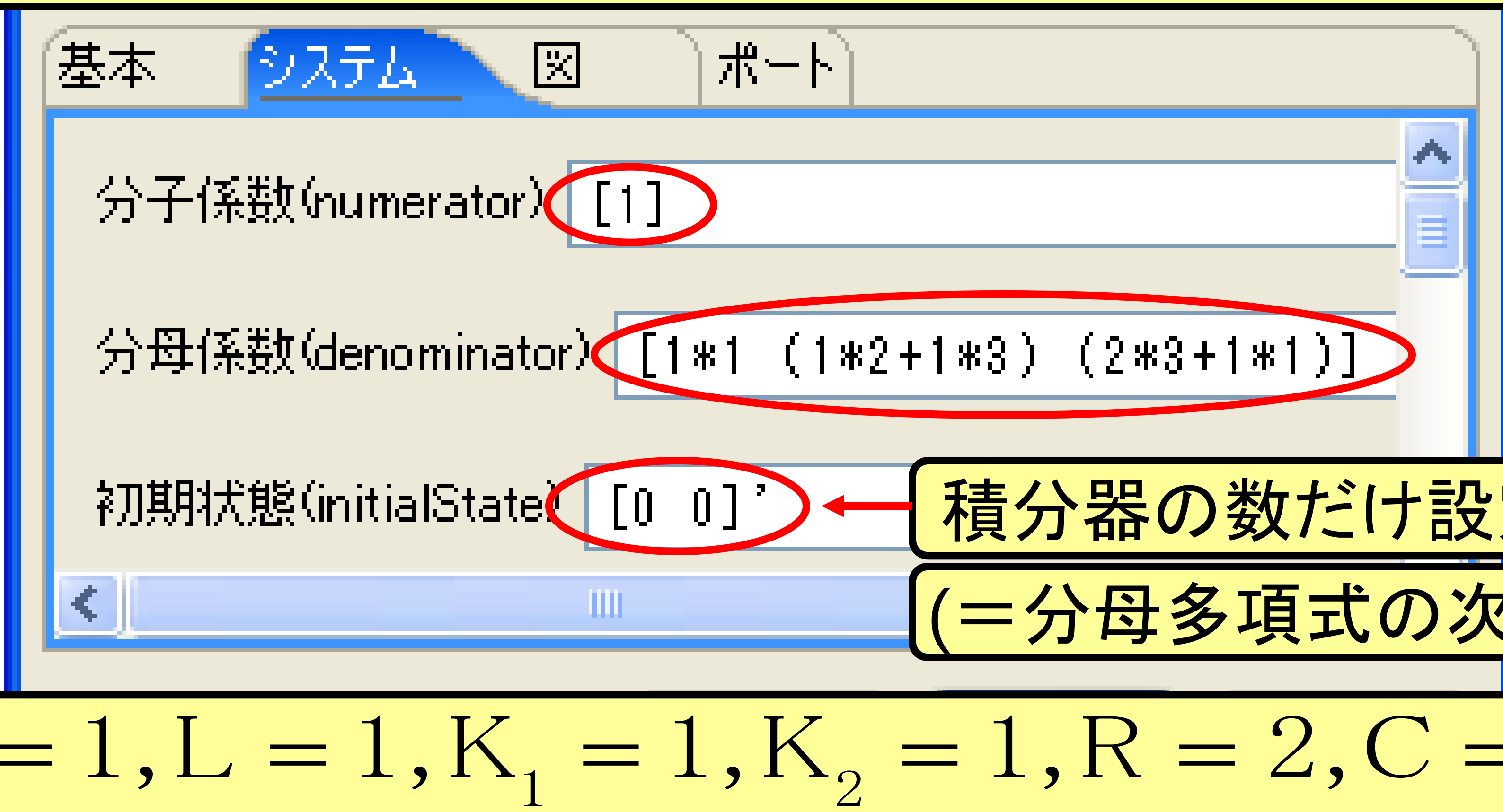


$$J = 1, L = 1, K_1 = 1, K_2 = 1, R = 2, C = 3$$

伝達関数ブロックのパラメータ設定

$$G(s) = \frac{K_2}{(JLs^2 + (JR + LC)s + (RC + K_1K_2))s}$$

初期条件 : $i(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$

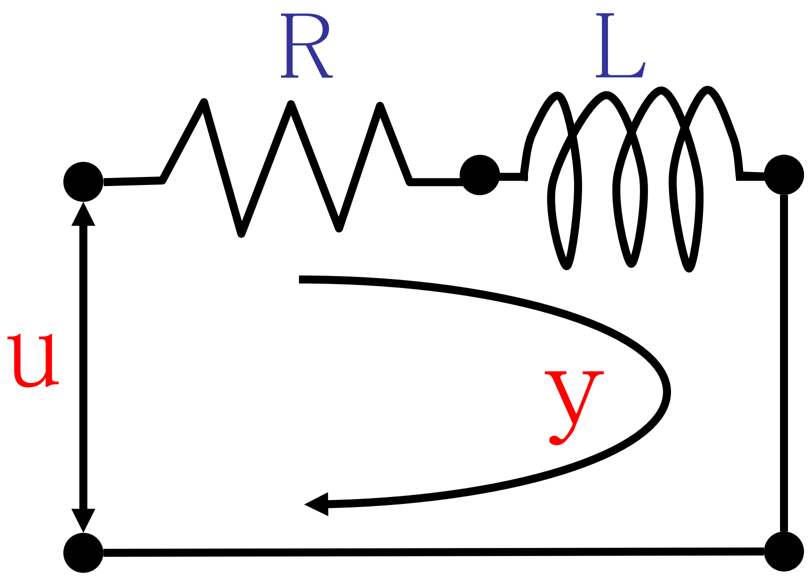


積分器の数だけ設定

(＝分母多項式の次数)

$$J = 1, L = 1, K_1 = 1, K_2 = 1, R = 2, C = 3$$

演習1：RL回路の応答

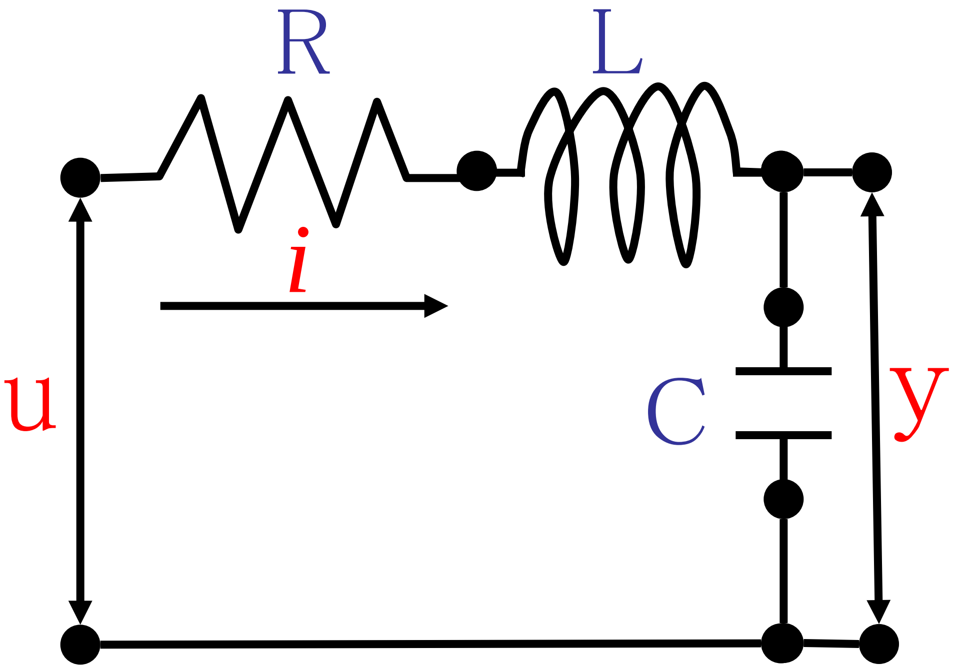


関係式：

$$u(t) = Ry(t) + L\dot{y}(t)$$

- 微分方程式表現からブロック線図を作成し、ステップ応答を求めよ。
（適当にパラメータ設定）
- 伝達関数を求めよ。
- 伝達関数からブロック線図を作成し、ステップ応答を求めよ。
（適当にパラメータ設定）

演習2：RLC回路の応答



- 微分方程式表現からブロック線図を作成し、ステップ応答を求めよ。（適当にパラメータ設定）
- 伝達関数を求めよ。
- 伝達関数からブロック線図を作成し、ステップ応答を求めよ。（適当にパラメータ設定）

関係式：

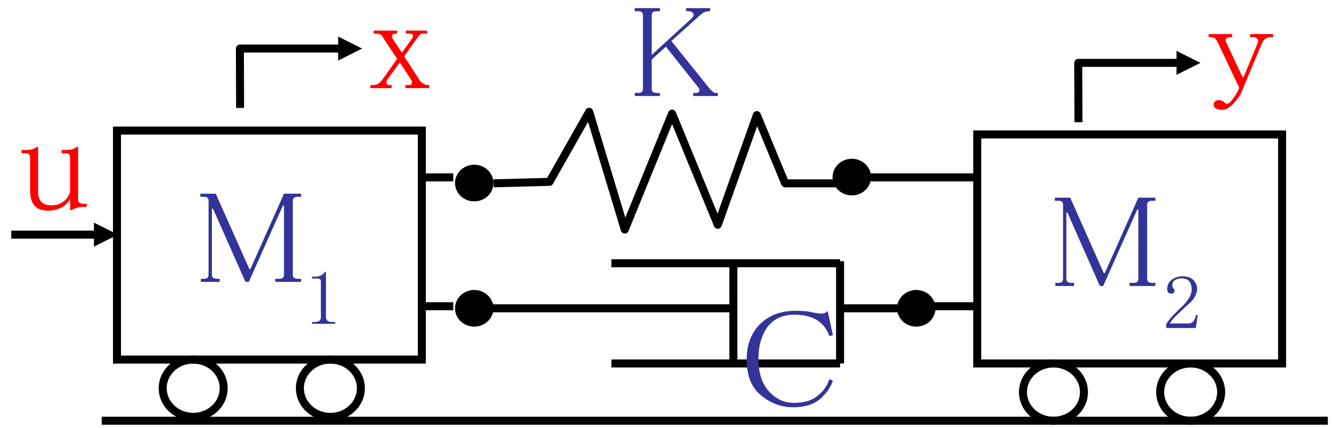
$$i(t) = C\dot{y}(t)$$

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + y(t)$$

演習３：初期状態の変更

- テキスト中の各システムについて、初期状態を変更しながらステップ応答を求め、初期状態について考察せよ。

演習4：質量×2・ばね・ダンパ系の応答

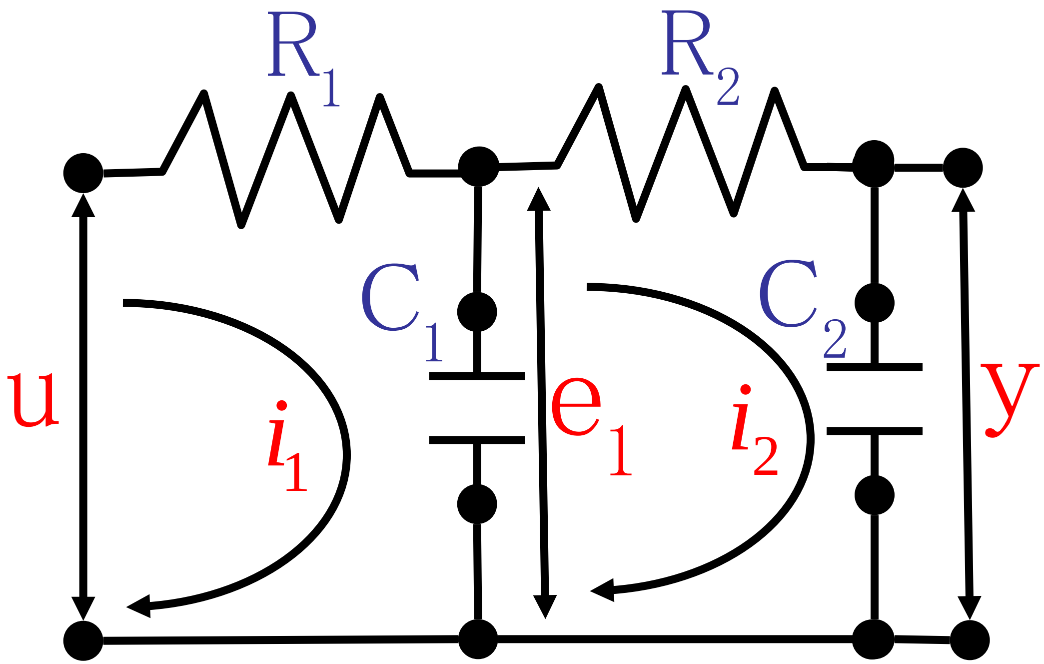


関係式：

$$M_1\ddot{x}(t) = u(t) + C(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) + K(y(t) - x(t))$$
$$M_2\ddot{y}(t) = -C(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) - K(y(t) - x(t))$$

- 微分方程式表現からブロック線図を作成し、ステップ応答を求めよ。
- 伝達関数を求めよ。
- 伝達関数からブロック線図を作成し、ステップ応答を求めよ。

演習5：RCRC型回路の応答



- 微分方程式表現からブロック線図を作成し、ステップ応答を求めよ。
- 伝達関数を求めよ。
- 伝達関数からブロック線図を作成し、ステップ応答を求めよ。

$$u(t) = R_1 i_1(t) + e_1(t)$$

$$R_2 i_2(t) + y(t) - e_1(t) = 0 \qquad y(t) = \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2(\tau)d\tau$$

$$e_1(t) = \frac{1}{C_1}\int_0^t (i_1(\tau) - i_2(\tau))d\tau$$